MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

WiSe 2022/23

Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Blatt 6b

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Sei K ein Körper und X, Y zwei endlich dimensionale Vektorräume über K.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : X \times Y \to \mathrm{Hom}_K(X^*, Y)$ mit $\varphi(x, y) = [f \mapsto f(x)y]$ bilinear ist.

(b) Sei $\mathcal{A} = \{x_1 \dots, x_n\}$ eine Basis von X und $\mathcal{B} = \{y_1 \dots, y_m\}$ eine Basis von Y. Zeigen Sie, dass $\{\varphi(x_i, y_j) \mid i \in \{1, \dots n\}, j \in \{1, \dots m\}\}$ eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(X^*, Y)$ ist.

(c) Schließen Sie, dass $\mathrm{Hom}_K(X^*, Y)$ mit diesem φ das Tensorprodukt $X \otimes Y$ realisiert.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \not\cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (als $\mathbb{C}$ Vektorräume). Hierbei fassen wir $\mathbb{C}$ links als $\mathbb{C}$ Vektorraum auf, während wir $\mathbb{C}$ rechts als $\mathbb{R}$ Vektorraum betrachten.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Sei V ein reeller Vektorraum und $V_{\mathbb{C}}$ seine Komplexifizierung. Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass $b_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ mit

$$b_{\mathbb{C}}(x + yi, u + vi) = b(x, u) + b(y, v) + i(b(y, u) - b(x, v))$$

eine Sesquilinearform ist.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: (Fortsetzung von Aufgabe 3) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $b(\cdot, \cdot)$.

(a) Zeigen Sie, dass $b_{\mathbb{C}}$ ein komplexes Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{C}}$ ist.

(b) Sei $f : V \to V$ selbst-adjungiert. Zeigen Sie, dass $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ selbst-adjungiert bezüglich $b_{\mathbb{C}}$ ist.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 01.02.2022, um 8.00 Uhr.