MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

WiSe 2022/23

Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag Blatt 6b

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Sei K ein Körper und X, Y zwei endlich dimensionale Vektorräume über K.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : X \times Y \to \operatorname{Hom}_K(X^*, Y)$ mit $\varphi(x, y) = [f \mapsto f(x)y]$ bilinear ist.

Lösungsvorschlag. Zunächst sollte man sich kurz überlegen, dass die Abbildung $f \mapsto f(x)y$ K-linear ist. Aber für f, g und $\lambda \in K$ gilt natürlich

$$(f + \lambda g)(x) \cdot y = f(x)y + \lambda g(x)y.$$

Sei nun $x, \tilde{x} \in X$ und $y, \tilde{y} \in Y$ und $\lambda \in K$. Dann gilt für alle $f \in X^*$

$$\varphi(x + \lambda\tilde{x}, y)(f) = f(x + \lambda\tilde{x})y = f(x)y + \lambda f(\tilde{x})y = \varphi(x, y)(f) + \lambda\varphi(\tilde{x}, y)(f).$$

Hierbei haben wir die Linearität von f benutzt. Da beide Abbildungen auf allen $f \in K^*$ übereinstimmen, sind sie gleich.

Außerdem gilt für alle $f \in X^*$

$$\varphi(x, y + \lambda\tilde{y})(f) = f(x)(y + \lambda\tilde{y}) = f(x)y + \lambda f(\tilde{x})y = \varphi(x, y)(f) + \lambda\varphi(\tilde{x}, y)(f).$$

□

(b) Sei $\mathcal{A} = \{x_1 \ldots, x_n\}$ eine Basis von X und $\mathcal{B} = \{y_1 \ldots, y_m\}$ eine Basis von Y. Zeigen Sie, dass $\{\varphi(x_i, y_j) \mid i \in \{1, \ldots n\}, j \in \{1, \ldots m\}\}$ eine Basis von $\operatorname{Hom}_K(X^*, Y)$ ist.

Lösungsvorschlag. Da wir im endlich dimensionalen Fall sind, gilt $\dim X^* = \dim X$ und somit folgt $\dim \operatorname{Hom}_K(X^*, Y) = \dim X^* \cdot \dim Y = \dim X \cdot \dim Y$. Die potentielle Basis hat also schonmal die richtige Größe und es genügt zu zeigen, dass sie ein erzeugenden System ist. Sei f_i die zu x_i gehörende Dualebasis. Also $f_i(x_j) = 1$ gdw $j = i$ und $= 0$ sonst.

Jede Lineare Abbildung $F : X^* \to Y$ ist eindeutig durch ihre Werte auf der Basis f_i bestimmt. Seien also $Y_i = F(f_i)$. Wir können $Y_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^i y_j$ als linear Kombination von der Basis $\mathcal{B}$ darstellen.

Behauptung: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_j^i \varphi(x_i, y_j) = F$.

Es genügt Gleichheit auf der Basis von X^* also den f_i nachzuprüfen. Sei $k \in \{1, \dots n\}$ beliebig. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_j^i \varphi(x_i, y_j)(f_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_j^i f_k(x_i) y_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k = Y_k = F(f_k).$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $f_i(x_k) = 1$ falls $i = k$ und $= 0$ sonst. Damit folgt die Gleichheit der Funktionen und somit handelt es sich bei $\varphi(x_i, y_j)$ um ein Erzeugendensystem und aus Dimensionsgründen um eine Basis. □

(c) Schließen Sie, dass $\mathrm{Hom}_K(X^*, Y)$ mit diesem φ das Tensorprodukt $X \otimes Y$ realisiert.

Beweis. Je nach Definition des Tensorprodukts sind wir bereits fertig. Falls man für jedes bilineare $b : X \times Y \to V$ ein eindeutiges $f : \mathrm{Hom}_K(X^*, Y) \to V$ mit $f \circ \varphi = b$ konstruieren möchte, definiert man f einfach auf der Basis aus (b), durch $f(\varphi(x, y)) = b(x, y)$ und setzt sie linear fort. Diese Abbildung erfüllt offensichtlich die gewünschte Eigenschaft und ist eindeutig. □

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \not\cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (als $\mathbb{C}$ Vektorräume). Hierbei fassen wir $\mathbb{C}$ links als $\mathbb{C}$ Vektorraum auf, während wir $\mathbb{C}$ rechts als $\mathbb{R}$ Vektorraum betrachten.

Lösungsvorschlag. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Linke Seite isomorph zu $\mathbb{C}$ ist. Außerdem ist die Rechte Seite als $\mathbb{R}$ Vektorraum nach Vorlesung 4 dimensional, da er das Tensorprodukt von dem zwei dimensionalen $\mathbb{R}$ Vektorraum $\mathbb{C}$ mit sich selbst ist.

Damit können beide Räume nicht als $\mathbb{R}$ Vektorräume isomorph sein, da Links 2 dimensional und Rechts 4 dimensional über $\mathbb{R}$ ist. Diese Aussage ist sogar noch stärker als gewünscht, denn wenn nicht einmal ein $\mathbb{R}$ linearer Isomorphismus existiert, dann sicher kein $\mathbb{C}$ linearer. □

Aufgabe 3 *(2 Punkte)***:** Sei V ein reeller Vektorraum und $V_{\mathbb{C}}$ seine Komplexifizierung. Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass $b_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ mit

$$b_{\mathbb{C}}(x + yi, u + vi) = b(x, u) + b(y, v) + i(b(y, u) - b(x, v))$$

eine Sesquilinearform ist.

Beweis. Seien $x + yi$ und $\tilde{x} + \tilde{y}i$ sowie $u + vi$ in $V_{\mathbb{C}}$ und $z = \lambda_1 + \lambda_2 i \in \mathbb{C}$.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
b_{\mathbb{C}}(x+yi+(\tilde{x}+\tilde{y}i),u+vi) =& b_{\mathbb{C}}(x+\tilde{x}+(y+\tilde{y})i),u+vi) \\
=& b(x+\tilde{x},u)+b(y+\tilde{y},v)+i(b(y+\tilde{y},u)-b(x+\tilde{x},v)) \\
=& b(x,u)+b(\tilde{x},u)+b(y,v)+b(\tilde{y},v) \\
&+i(b(y,u)+b(\tilde{y},u)-b(x,v)-b(\tilde{x},v)) \\
=& b_{\mathbb{C}}(x+yi,u+vi)+b_{\mathbb{C}}(\tilde{x}+\tilde{y}i,u+vi).
\end{aligned}
$$

Analog beweist man die Additivität im zweiten Argument. Interessanter ist die skalare Multiplikation. Im ersten Argument sind wir linear, denn

$$
\begin{aligned}
b_{\mathbb{C}}((\lambda_1+\lambda_2 i)(x+yi),u+vi) =& b_{\mathbb{C}}(\lambda_1 x-\lambda_2 y+(\lambda_1 y+\lambda_2 x)i,u+vi) \\
=& b(\lambda_1 x-\lambda_2 y,u)+b(\lambda_1 y+\lambda_2 x,v) \\
&+i(b(\lambda_1 y+\lambda_2 x,u)-b(\lambda_1 x-\lambda_2 y,v)) \\
=& \lambda_1 b(x,u)-\lambda_2 b(y,u)+\lambda_1 b(y,v)+\lambda_2 b(x,v) \\
&+i(\lambda_1 b(y,u)+\lambda_2 b(x,u)-\lambda_1 b(x,v)-\lambda_2 b(y,v)) \\
=& (\lambda_1+\lambda_2 i)(b(x,u)+b(y,v)+i(b(y,u)-b(x,v))) \\
=& (\lambda_1+\lambda_2 i)b_{\mathbb{C}}(x+yi,u+vi).
\end{aligned}
$$

Im zweiten Argument sind wir semilinear denn

$$
\begin{aligned}
b_{\mathbb{C}}(x+yi,(\lambda_1+\lambda_2 i)(u+vi)) =& b_{\mathbb{C}}(x+yi,\lambda_1 u-\lambda_2 v+(\lambda_1 v+\lambda_2 u)i) \\
=& b(x,\lambda_1 u-\lambda_2 v)+b(y,\lambda_1 v+\lambda_2 u) \\
&+i(b(y,\lambda_1 u-\lambda_2 v)-b(x,\lambda_1 v+\lambda_2 u)) \\
=& \lambda_1 b(x,u)-\lambda_2 b(x,v)+\lambda_1 b(y,v)+\lambda_2 b(y,u) \\
&+i(\lambda_1 b(y,u)+\lambda_2 b(y,v)-\lambda_1 b(x,v)-\lambda_2 b(x,u)) \\
=& (\lambda_1-\lambda_2 i)(b(x,u)+b(y,v)+i(b(y,u)-b(x,v))) \\
=& (\lambda_1-\lambda_2 i)b_{\mathbb{C}}(x+yi,u+vi).
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** (Fortsetzung von Aufgabe 3) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $b(\cdot,\cdot)$.

(a) Zeigen Sie, dass $b_{\mathbb{C}}$ ein komplexes Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{C}}$ ist.

Beweis. Nach Aufgabenteil (a) reicht es in diesem Fall zu überprüfen, dass $b_{\mathbb{C}}$ hermitesch und positiv definit ist. Für alle $x+yi,u+vi\in V_{\mathbb{C}}$ gilt

$$
\begin{aligned}
b_{\mathbb{C}}(x+yi,u+vi) &= b(x,u)+b(y,v)+i(b(y,u)-b(x,v)) \\
&= b(u,x)+b(v,y)-i(b(v,x)-b(u,y)) \\
&= \overline{b_{\mathbb{C}}(u+vi,x+yi)}.
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir die Symmetrie von b als Skalarprodukt genutzt. Weiter gilt

$$b_{\mathbb{C}}(x+yi,x+yi)=b(x,x)+b(y,y)+i(b(y,x)-b(x,y))=b(x,x)+b(y,y).$$

Da b positiv definit ist, folgt dass das Ergebnis immer ≥ 0 und nur für $x = y = 0$ gleich 0 ist.

Damit ist $b_{\mathbb{C}}$ ein komplexes Skalarprodukt. $\square$

(b) Sei $f : V \to V$ selbst-adjungiert. Zeigen Sie, dass $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ selbst-adjungiert bezüglich $b_{\mathbb{C}}$ ist.

Lösungsvorschlag. Sei V und f wie in der Aufgabenstellung. Seien $v, w \in V_{\mathbb{C}}$. Wir schreiben $v = x + y, w = u + vi$ mit $x, y, u, v \in V$. Wir müssen zeigen, dass

$$b_{\mathbb{C}}(f(v), w) = b_{\mathbb{C}}(v, f(w)).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} b_{\mathbb{C}}(f(v), w) &= b_{\mathbb{C}}(f(x) + f(y)i, u + vi) \\ &= b(f(x), u) + b(f(y), v) + i(b(f(y), u) - b(f(x), v)) \\ &= b(x, f(u)) + b(y, f(v)) + i(b(y, f(u)) - b(x, f(v))) \\ &= b_{\mathbb{C}}(x + yi, f(u) + f(v)i) \\ &= b_{\mathbb{C}}(v, f(w)). \end{aligned}$$

$\square$