MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2022/23

Probeklausur zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Die Probeklausur zu den algebraischen Strukturen besteht aus Augaen 1-5, die Probeklausur zur multilinearen Algebrau aus den Aufgaben 3-7.

Aufgabe 1 *(10 Punkte)***:** Für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ sei auf $\mathbb{R}$ folgende Verknüpfung definiert:

$$x \circ y = s + 2t(x + y) \ .$$

Für welche Wahl von s, t ist $(\mathbb{R}, \circ)$ eine Gruppe. Wie lautet das neutrale Element in Abhängigkeit von s und t? Wie das Inverse zu einer Zahl $x \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 2 *(10 Punkte)***:** Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$. Bestimmen Sie die von $\{a, b\}$ erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Beweisen Sie, dass es sich bei Ihrer Lösung in der Tat um die von $\{a, b\}$ erzeugte Untergruppe handelt.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)***:** Sei $U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Zeigen sie, dass U eine Untergruppe der Menge GL_3 aller invertierbaren 3×3-Matrizen ist.

(b) Ist U ein Normalteiler von GL_3? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 4 *(10 Punkte)***:** Sei K ein endlicher Körper mit Charakteristik ungleich 2. Zeigen sie, dass genau die Hälfte der Elemente von $K \backslash \{0\}$ Quadratzahlen sind. Wie verhält es sich mit Körpern der Characteristik 2?

Aufgabe 5 *(10 Punkte)***:** Es sei I ein Ideal eines kommutativen Ringes R mit Einselement. Das Radikal zu I ist definiert durch

$$\sqrt{I} := \{a \in R : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n \in I\} \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ ein Ideal von R ist.

(b) Sei a eine Wurzel von 0, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $a^n = 0$. Zeigen Sie, dass $1 + a$ invertierbar ist.

Aufgaben zur Linearen Algebra 2

Aufgabe 6 *(10 Punkte)***:** Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $b : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. f_b sei die zugehörige lineare Abbildung, d.h für den Tensorraum $(V \otimes V, \phi)$ ist $f_b : V \otimes V \to K$ mit $f_b \circ \phi = b$.

Zeigen Sie, dass $\operatorname{span}(x \otimes y - y \otimes x : x, y \in V)$ eine Teilmenge des Kernes von f_b ist.

Aufgabe 7 *(10 Punkte)***:** Gegeben sei die reelle Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ so dass die Bilinearform b_A gegeben durch $b_A(x, y) = x^t A y$ diagonalgestalt hat.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 02.11.2022, um 8.00 Uhr.