Übungen zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Tutoriumsblatt 1

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Entscheiden Sie bei folgenden Mengen, ob es sich zusammen mit den jeweiligen Verknüpfungen um Gruppen handelt:

(a) Die Menge $\mathbb{N}_0$ bezüglich der üblichen Addition.

(b) Die Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{Z}$ der ungeraden Zahlen bezüglich der üblichen Addition.

(c) Die Menge $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{Z}$ der geraden Zahlen bezüglich der üblichen Addition.

($\star$)(d) Die Menge $\{0, 1\}$ zusammen mit folgender Addition: $0+0=0, 1+0=0+1=1$ und $1+1=0$. (Wir rechnen also Modulo 2)

($\star$)(e) Die Menge der ganzzahligen 2er Potenzen also $\mathcal{M} = \{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, mit der üblichen Multiplikation.

Aufgabe 2 *(3 Punkte)*: Gegeben Sei die Menge $\mathbb{Z}$. Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{Z}$ (auch Potentzmenge genannt).

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mit der Verknüpfung $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ keine Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mit der Verknüpfung $A \cup B$ keine Gruppe ist.

($\star$)(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mit der Verknüpfung $A \cap B$ keine Gruppe ist.

Aufgabe 3 *(3 Punkte)*: (a) Wir betrachten die ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ mit $a \circ b = a + b + k$ wobei $k \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl ist.

Zeigen Sie, dass es sich um eine Gruppe handelt und geben Sie das neutrale Element und das Inverse in Abhängigkeit von k an.

($\star$) (b) Wir verallgemeinern die Aussage. Sei $(\mathcal{G}, \circ)$ eine kommutative Gruppe. Sei nun $g \in \mathcal{G}$ beliebig. Zeigen Sie, dass es sich bei $(\mathcal{G}, \star)$ mit

$$x \star y = x \circ y \circ g$$

ebenfalls um eine Gruppe handelt.