MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2022/23

Übungen zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Tutoriumsblatt 1

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Entscheiden Sie bei folgenden Mengen, ob es sich zusammen mit den jeweiligen Verknüpfungen um Gruppen handelt:

(a) Die Menge $\mathbb{N}_0$ bezüglich der üblichen Addition.

(b) Die Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{Z}$ der ungeraden Zahlen bezüglich der üblichen Addition.

(c) Die Menge $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{Z}$ der geraden Zahlen bezüglich der üblichen Addition.

($\star$)(d) Die Menge $\{0, 1\}$ zusammen mit folgender Addition: $0+0=0, 1+0=0+1=1$ und $1+1=0$. (Wir rechnen also Modulo 2)

($\star$)(e) Die Menge der ganzzahligen 2er Potenzen also $\mathcal{M} = \{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, mit der üblichen Multiplikation.

Loesungsvorschlag. (a) Die Menge $\mathbb{N}_0$ bezüglich der üblichen Addition ist keine Gruppe, da es keine Inversen gibt. Das neutrale Element ist natürlich die 0 aber es gibt keine natürliche Zahl (inkl. 0), sodass $1+n=0$.

(b) Die Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{Z}$ der ungeraden Zahlen bezüglich der üblichen Addition ist keine Gruppe da es kein neutrales Element gibt. Die Null ist nämlich nicht enthalten. Tatsächlich ist die Menge nicht einmal abgeschlossen bzgl. der Operation Plus. Denn wenn man zwei ungeraden Zahlen addiert, erhält man eine gerade. Obwohl also $1 \in \mathcal{U}$ ist $1+1=2 \notin \mathcal{U}$.

(c) Die Menge $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{Z}$ der geraden Zahlen bezüglich der üblichen Addition ist eine Gruppe. Das neutrale Element ist die 0 und die Addition ist ja auf ganz $\mathbb{Z}$ assoziativ, also insbesondere auch für gerade Zahlen. Das Inverse einer geraden Zahl k, ist natürlich $-k$. Und falls k gerade ist, ist auch $-k$ gerade und somit in unsere Menge enthalten.

[($\star$)(d) Die Menge $\{0, 1\}$ zusammen mit folgender Addition: $0+0=0, 1+0=0+1=1$ und $1+1=0$.

Hierbei handelt es sich um eine Gruppe. Wir sehen direkt in der Definition, dass 0 das neutrale Element ist. Das Inverse zur 0 ist Null und das Inverse zur 1 ist 1. Die Assoziativität kann man entweder per Hand prüfen (es gibt 8 Fälle, von denen wegen Kommutativität ein paar wegfallen) oder man hat es irgendwann einmal für Modulo

Rechnug allgemein gesehen.

($\star$)(e) Die Menge der ganzzahligen 2er Potenzen also $\mathcal{M} = \{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, mit der üblichen Multiplikation ist eine Gruppe.

Das neutrale Element ist $1 = 2^0 \in \mathcal{M}$ und die Multiplikation ist ja die selbe wie in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ und somit assoziativ. Das Inverse einer Zahl 2^k ist $\frac{1}{2^k}$ also $2^{-k} \in \mathcal{M}$. Damit handelt es sich um eine Gruppe.

$\square$

Aufgabe 2 *(3 Punkte)*: Gegeben Sei die Menge $\mathbb{Z}$. Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{Z}$ (auch Potentzmenge genannt).

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mit der Verknüpfung $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ keine Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mit der Verknüpfung $A \cup B$ keine Gruppe ist.

($\star$)(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mit der Verknüpfung $A \cap B$ keine Gruppe ist.

Loesungsvorschlag. (a) Die Verknüpfung ist nicht assoziativ. Denn für $A = B = C = \mathbb{Z}$ gilt

$$A \setminus (B \setminus C) = \mathbb{Z} \setminus \emptyset = \mathbb{Z} \neq \emptyset = \emptyset \setminus \mathbb{Z} = (A \setminus B) \setminus C.$$

Bemerkung: Wir haben gesehen, dass in Gruppen ein links neutrales Element immer auch rechts neutral ist und umgekehrt. Im Beweis haben wir die Assoziativität benutzt, die in diesem Fall weg fällt.

Tatsächlich gibt es ein rechts neutrales Element nämlich die leere Menge $\emptyset$. Denn für alle $A \subseteq \mathbb{Z}$ gilt, $A \setminus \emptyset = A$. Aber die leere Menge ist nicht rechts neutral. Denn $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

(b) Diese Verknüpfung ist Assoziativ. Tatsächlich gibt es auch ein neutrales Element, nämlich die leere Menge. Denn für alle $A \subseteq \mathbb{Z}$ gilt $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$. Das Problem muss also bei den Inversen liegen. Und tatsächlich gibt es für $A \neq \emptyset$ keine Menge B sodass $A \cup B = \emptyset$. Denn $A \subseteq A \cup B$ und somit kann die Vereinigung nicht leer sein.

($\star$)(c) Die Verknüpfung ist assoziativ und man überprüft leicht, dass das neutrale Element durch $\mathbb{Z}$ gegeben ist. Wieder liegt das Problem bei den Inversen. So gibt es keine Menge B mit der man $A = \{1\}$ schneiden könnte um die ganze Menge $\mathbb{Z}$ zu erhalten.

$\square$

Aufgabe 3 *(3 Punkte)*: (a) Wir betrachten die ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ mit $a \circ b = a + b + k$ wobei $k \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl ist.

Zeigen Sie, dass es sich um eine Gruppe handelt und geben Sie das neutrale Element und das Inverse in Abhängigkeit von k an.

($\star$) (b) Wir verallgemeinern die Aussage. Sei $(\mathcal{G}, \circ)$ eine kommutative Gruppe. Sei nun $g \in \mathcal{G}$

beliebig. Zeigen Sie, dass es sich bei $(\mathcal{G}, \star)$ mit

$$x \star y = x \circ y \circ g$$

ebenfalls um eine Gruppe handelt.

Loesungsvorschlag. Wir beweisen nur b). Der Beweis von a) funktioniert analog in dem man die konkrete Menge und Verknüpfung einsetzt.

Die Verknüpfung ist Assoziativ, denn

$$x \star (y \star z) = x \star (y \circ z \circ g) = x \circ (y \circ z \circ g) \circ g = (x \circ y \circ g) \circ z \circ g = (x \star y) \star z.$$

Hierbei haben wir die Kommutativität und Assoziativität von $\circ$ benutzt.

Das neutrale Element ist das Inverse von g bezüglich $\circ$, also $e = g^{-1}$. Es gilt nämlich

$$x \star g^{-1} = x \circ g^{-1} \circ g = x.$$

Das Inverse von x (bzgl $\star$) ist $y = x^{-1} \circ g^{-1} \circ g^{-1}$. Denn

$$x \star y = x \circ x^{-1} \circ g^{-1} \circ g^{-1} \circ g = g^{-1} = e.$$

Bei dieser Aufgabe muss man vorsichtig sein, was man mit x^{-1} meint. Meint man das Inverse bzgl. $\circ$ oder bzgl $\star$. In unsere Lösung meinen wir mit der Notation immer das Inverse bzgl. der ursprünglichen Verknüpfung $\circ$.

Für a) ergibt sich als neutrales Element also $-k$ und als Inverses zu $a \in \mathbb{Z}$ die Zahl $b = -a - 2k$. $\square$