

# Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl  
Kajetan Söhnen

## Lösungsvorschlag zu Tutoriumsblatt 1b

**Aufgabe 1:** Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um Bilinearformen auf dem  $\mathbb{R}^2$  handelt. Falls ja, geben Sie die Gram'sche Matrix bzgl. der Standardbasis an.

$$(a) \mathbf{a} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \quad \mathbf{a} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = a + b + c + d.$$

$$(b) \mathbf{b} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \quad \mathbf{b} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = ad.$$

$$(\star)(c) \mathbf{c} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \quad \mathbf{c} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = 2ac - cd.$$

**Aufgabe 2:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$  mit Basis  $\mathcal{B}$ . Weiter sei  $b : V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform und  $B$  die Gram'sche Matrix zu  $b$  bzgl.  $\mathcal{B}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\tilde{b} : V \times V \rightarrow K$  mit  $\tilde{b}(x, y) = b(y, x)$  auch eine Bilinearform ist.
- (b) Geben Sie die Gram'sche Matrix von  $\tilde{b}$  bzgl.  $\mathcal{B}$  an.
- ( $\star$ )(c) Zeigen Sie, dass für  $\lambda \in K$  auch  $\lambda b$  mit  $\lambda b(x, y) = \lambda \cdot b(x, y)$  eine Bilinearform ist und geben Sie die Gram'sche Matrix an.

**Aufgabe 3:** Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  mit  $\text{char } K \neq 2$  mit  $\dim V < \infty$ .

- (a) Sei  $b : V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform, die sowohl symmetrisch, als auch antisymmetrisch ist. Zeigen Sie, dass  $b = 0$ , das heißt, dass  $b(v, w) = 0$  für alle  $v, w \in V$ .
- ( $\star$ )(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu obiger Aussage, falls der Körper Charakteristik gleich 2 hat.

**Aufgabe 4:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  und  $b$  eine Bilinearform  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass folgende Aussage nicht gilt:

$$\forall v \in V : b(v, v) \geq 0.$$