Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Tutoriumsblatt 1b

Aufgabe 1: Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um Bilinearformen auf dem $\mathbb{R}^2$ handelt. Falls ja, geben Sie die Gram'sche Matrix bzgl. der Standardbasis an.

(a) $\mathbf{a} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$$\mathbf{a}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = a + b + c + d.$$

Loesungsvorschlag. Hierbei handelt es sich nicht um eine Bilinearform, denn für $b = c = d = 0$ erhalten wir
$$\mathbf{a}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1.$$
Bei einer Bilinearform muss das Ergebnis, aber immer $= 0$ sein sobald man einen Vektor (in diesem Fall den zweiten Vektor) gleich Null setzt. Nachdem das hier nicht der Fall ist, kann es sich nicht um eine Bilinearform handeln. □

(b) $\mathbf{b} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$$\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = ad.$$

Loesungsvorschlag. Man überprüft "leicht", dass
$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ad.$$
Damit handelt es sich nach Vorlesung um eine Bilinearform. □

($\star$)(c) $\mathbf{c} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$$\mathbf{c}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = 2ac - cd.$$

Loesungsvorschlag. Ähnlich wie bei Aufgabenteil a) stellen wir fest, dass
$$\mathbf{c}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 - 1 = -1 \neq 0$$
Bei einer Bilinearform muss das Ergebnis, aber immer $= 0$ sein sobald man einen Vektor (in diesem Fall den ersten Vektor) gleich Null setzt. □

Aufgabe 2: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit Basis $\mathcal{B}$. Weiter sei $b : V \times V \to K$ eine Bilinearform und B die Gram'sche Matrix zu b bzgl. $\mathcal{B}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\tilde{b} : V \times V \to K$ mit $\tilde{b}(x, y) = b(y, x)$ auch eine Bilinearform ist.

Loesungsvorschlag. Die Linearität von $\tilde{b}$ im ersten Eintrag ist folgt sofort aus der Linearität von b im zweiten Eintrag. Analog folgt die Linearität von $\tilde{b}$ im zweiten Eintrag, aus der von b im ersten Eintrag.

Damit handelt es sich um eine Bilinearform. □

(b) Geben Sie die Gram'sche Matrix von $\tilde{b}$ bzgl. $\mathcal{B}$ an.

Loesungsvorschlag. Seien b_i die Basisvektoren in $\mathcal{B}$. Dann ist der ijte Eintrag der Gramsche Matrix zu b durch $b(b_i, b_j)$ gegeben. Entsprechend ist der ijte Eintrag der Gramschen Matrix von $\tilde{b}$ durch $\tilde{b}(b_i, b_j) = b(b_j, b_i)$ gegeben. Also durch den jiten Eintrag von B. Kurzum die Gramsche Matrix von $\tilde{b}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist die transponierte Matrix B^T. □

($\star$)(c) Zeigen Sie, dass für $\lambda \in K$ auch λb mit $\lambda b(x, y) = \lambda \cdot b(x, y)$ eine Bilinearform ist und geben Sie die Gram'sche Matrix an.

Beweis. Die Linearität im ersten Eintrag folgt, da

$$\lambda b(x + \alpha x', y) = \lambda \cdot b(x + \alpha x', y) = \lambda \cdot (b(x, y) + \alpha \cdot b(x', y)) = \lambda b(x, y) + \alpha \cdot \lambda b(x', y).$$

Analog folgt die Linearität im zweiten Argument.

Aus der Definition der Gramschen Matrix folgt sofort, dass die Gramsche Matrix von λb durch $\lambda \cdot B$ gegeben ist. □

Aufgabe 3: Sei V ein Vektorraum mit $\dim V < \infty$ über einem Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$.

(a) Sei $b : V \times V \to K$ eine Bilinearform, die sowohl symmetrisch, als auch antisymmetrisch ist. Zeigen Sie, dass $b = 0$, das heißt, dass $b(v, w) = 0$ für alle $v, w \in V$.

Loesungsvorschlag. Es gilt für alle $v, w \in V$, dass

$$b(v, w) = b(w, v) = -b(v, w).$$

Hierbei haben wir zunächst die Symmetrie und dann die Antisymmetrie benutzt. Es gilt also $2b(v, w) = 0$ womit da $\operatorname{char} K \neq 2$ folgt, dass $b(v, w) = 0$ für alle $v, w \in V$.

□

($\star$)(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu obiger Aussage, falls der Körper Charakteristik gleich 2 hat.

Loesungsvorschlag. Wir betrachten als K den Körper mit zwei Elementen, also 0 und 1. (Alles funktioniert wie gewohnt, aber $1 + 1 = 0$, also $-1 = 1$)

Es ist tatsächlich egal, welchen Vektorraum V wir betrachten. Jede symmetrische Bilinearform über K ist auch antisymmetrisch, da

$$b(v, w) = b(w, v) = -b(w, v).$$

Die letzte Gleichung gilt in dem Körper mit nur zwei Elementen immer, denn $0 = -0$ und $1 = -1$ und andere Zahlen gibt es nicht. Ein Beispiel ist also nach Wahl einer Basis, das Standardskalarprodukt. Oder konkret für $V = K$ als eindimensionalen Vektorraum die Abbildung $b : K \times K \to K$ mit $b(a, b) = ab$.

$\square$

Aufgabe 4: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und b eine Bilinearform $V \times V \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussage <u>nicht</u> gilt:

$$\forall v \in V : b(v, v) \geq 0.$$

Beweis. Ziel der Aufgabe ist es, die Aussage in einem *beliebigen* endlich Dimensionalen Vektorraum V zu widerlegen. Sie also V beliebig geben. Wir wählen zunächst eine Basis $\mathcal{B}$ von V. Sei $n = \dim V$, dann definiert jede $n \times n$ Matrix A über

$$x^T A y$$

eine Bilinearform auf $V \times V$. Wir betrachten die Matrix $-\mathbb{E}$. Also die Matrix mit -1 auf der Diagonalen und Nullen sonst.

Schreiben wir $v = (v_1, \ldots, v_n)$ mit Hilfe der Basis $\mathcal{B}$ so erkennen wir, dass

$$v^T A v = v^T(-v) = -(v^T \cdot v) = -(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2).$$

Solange also $v \neq 0$ folgt $v^T A v < 0$ was die Aussage in einem beliebiegen Vektorraum widerlegt. $\square$