MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

WiSe 2022/23

Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Tutoriumsblatt 2a

Aufgabe 1: Wir betrachten $\mathbb{R}^+$ mit der Verknüpfung: $\quad x \circ y = \dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^+$ mit der Verknüpfung eine kommutative Halbgruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^+$ mit der Verknüpfung kein Monoid ist.

(c) Beweisen Sie mit Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

(d) Bei einer Parallelschaltung von n Widerständen $R_1, \dots, R_n$ ist der Gesamtwiderstand der Schaltung $R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n$. Was bedeuten die Eigenschaften aus (a) und (b) in diesem Sachzusammenhang?

Aufgabe 2: Wir nutzen in der Gruppe $(G, \circ)$ für $n \in \mathbb{N}$ die Schreibweise $a^n = a \circ \ldots \circ a$. Geben Sie in den gegebenen Gruppen a^n für alle $a \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}$ konkret an:

(a) $(\mathbb{Z}, +)$ (b) $(\mathbb{R}^+, \circ)$ wie in Aufgabe 1 ($\star$) (c) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$.

Aufgabe 3: Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Geben Sie für die folgenden Mengen M jeweils die kleinste Untergruppe von $\mathbb{Z}$, an die M enthält.

(a) $M_1 = \{0\}$ (b) $M_2 = \{7\}$ (c) $M_3 = \{6, 10\}$ ($\star$) (d) $M_4 = \{a, b\}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4: Für eine kommutative Gruppe $(G, \circ)$ mit zwei Untergruppen $M, N \subseteq G$ definieren wir die Menge $M \circ N = \{m \circ n \mid m \in M, n \in N\}$.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei $M \circ N$ um eine Untergruppe von $(G, \circ)$ handelt.

(b) Sei G die Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit Matrixmultiplikation.

(i) Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass G nicht kommutativ ist.

($\star$) (ii) Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Zeigen Sie, dass M und N Untergruppen von G sind.

($\star$) (iii) Zeigen Sie, dass hier $M \circ N$ keine Untergruppe von G ist.