MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2022/23

Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Tutoriumsblatt 2a

Aufgabe 1: Wir betrachten $\mathbb{R}^+$ mit der Verknüpfung: $x \circ y = \dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^+$ mit der Verknüpfung eine kommutative Halbgruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^+$ mit der Verknüpfung kein Monoid ist.

(c) Beweisen Sie mit Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

(d) Bei einer Parallelschaltung von n Widerständen $R_1, \dots, R_n$ ist der Gesamtwiderstand der Schaltung $R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_n$. Was bedeuten die Eigenschaften aus (a) und (b) in diesem Sachzusammenhang?

Lösungsvorschlag. (a) Um zu zeigen, dass es sich um eine Halbgruppe handelt müssen wir überprüfen, dass für $x, y \in \mathbb{R}^+$ auch $x \circ y \in \mathbb{R}^+$. Aber für $x > 0, y > 0$ sind auch $\frac{1}{x} > 0$ und $\frac{1}{y} > 0$ und somit auch $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 0$. Damit ist dann aber auch $x \circ y > 0$.

Zusätzlich muss die Verknüpfung Assoziativ sein. Seien also $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, dann gilt

$$(x \circ y) \circ z = \frac{1}{\frac{1}{x \circ y} + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}} + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

Analog kann man $x \circ (y \circ z)$ berechnen und kommt zum gleichen Ergebnis. Die Verknüpung ist also assoziativ.

Dass die Verknüpfung komutativ ist, folgt direkt aus der Definition und der Komutativität von $+$.

(b) Ein Monoid ist eine Halbgruppe mit neutralem Element. Wir sollen also nachweisen, dass es kein neutrales Element bezüglich $\circ$ gibt. Sei e ein Kandidat fürs neutrale

Element, dann müsste $x \circ e = x$ gelten. Aber

$$\begin{aligned} x = x \circ e &= \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{e}} \\ \iff \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{e} \\ \iff 0 &= \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Da es kein $e \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{e} = 0$ gibt, kann es kein neutrales Element bezüglich $\circ$ geben und es handelt sich nicht um einen Monoid.

(c) Beweis durch Induktion:

I.A.: Für $n = 2$ ist die Aussagen einfach die Definition und für $n = 3$ haben wir sie bereits in (a) bewiesen.

Als nächstes nehmen wir an, dass die Aussage für ein beliebiges aber festes n gilt und folgern mit dieser Annahme, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt.

Sei also $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt.

I.V. Für dieses n für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

I.S.: $n \to n+1$. Um die Aussage unter Annahme der I.V. auch für $n+1$ zu beweisen seien $y_1, \ldots y_n, y_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} y_1 \circ \cdots \circ y_n \circ y_{n+1} &= (y_1 \circ \cdots \circ y_n) \circ y_{n+1} \\ &\overset{I.V.}{=} \frac{1}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n}} \circ y_{n+1} \\ &\overset{Def.}{=} \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n}}} + \frac{1}{y_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n} + \frac{1}{y_{n+1}}}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage aus vollständiger Induktion über $\mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Aufgabe 2: Wir nutzen in der Gruppe $(G, \circ)$ für $n \in \mathbb{N}$ die Schreibweise $a^n = a \circ \ldots \circ a$. Geben Sie in den gegebenen Gruppen a^n für alle $a \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}$ möglichst konkret an:

(a) $(\mathbb{Z}, +)$ (b) $(\mathbb{R}^+, \circ)$ wie in Aufgabe 1 ($\star$) (c) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$.

Lösungsvorschlag. (a) in $(\mathbb{Z}, +)$ gilt $a^n = a + a \ldots + a = na$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) in der Gruppe aus Aufgabe 1 gilt $a^n = \frac{1}{\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{n}{a}} = \frac{a}{n}$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$.

(c) in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ geben wir die Ergebnisse einzeln an. Für $0 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $0^n = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$.

Für $1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gilt $1^1 = 1$, $1^2 = 1 + 1 = 2$, $1^3 = 1 + 1 + 1 = 0$. Dann wiederholt sich das Muster, denn $1^4 = 1$, $1^5 = 2$ und $1^6 = 0$.

Allgemein gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $n = 3k$, dass $1^n = 0, 1^{n+1} = 1$ und $1^{n+2} = 2$. Da jede natürliche Zahl sich als $3k, 3k + 1$ oder $3k + 2$ schreiben lässt, sind das alle Fälle.

Für $2 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ folgt analog für $n = 3k$, dass $2^n = 0, 2^{n+1} = 2$ und $2^{n+2} = 1$.

□

Aufgabe 3: Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ Geben Sie für die folgenden Mengen M, jeweils die kleinste Untergruppe von $\mathbb{Z}$ an die M enthält.

(a) $M_1 = \{0\}$ (b) $M_2 = \{7\}$ (c) $M_3 = \{6, 10\}$ ($\star$) (d) $M_4 = \{a, b\}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (a) M_1 ist selbst eine Untergruppe, denn sie ist nicht leer und abgeschlossen bezüglich Addition und Inverser.

(b) M_2 ist nicht abgeschlossen bezüglich Addition, denn $7 + 7 = 14$ und $7 + 7 + 7 = 21$ und so weiter. Bei der Menge $\{7, 14, 21, \ldots\}$ fehlen immer noch die Inversen und das neutrale Element. Fügen wir all das hinzu erhalten wir die Menge $7\mathbb{Z} = \{\ldots, -14, -7, 0, 7, 14, \ldots\}$. Hierbei handelt es sich tatsächlich um eine Untergruppe.

(c) Damit es abgeschlossen bezüglich Inverser ist, brauchen wir die -10 und damit es abgeschlossen bezüglich Addition ist, brauchen wir die $12 = 6 + 6$ und dann auch die $2 = 12 - 10$. Wie in (b) folgt jetzt, dass jede Gruppe die M_3 enthält bereits alle geraden Zahlen enthalten muss. Die geraden Zahlen sind aber eine Untergruppe, und damit die kleinste Untergruppe die M_3 enthält.

(d) Wir brauchen das Wissen, dass man den $\operatorname{ggT}(a, b)$ immer durch $\operatorname{ggT}(a, b) = \lambda a + \mu b$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ ausdrücken kann. Damit muss jede Untergruppe die M_4 enthält, auch $\operatorname{ggT}(a, b)$ enthalten. Damit muss die Untergruppe wie in (b) bereits die Menge $\operatorname{ggT}(a, b)\mathbb{Z}$ enthalten. Da der größte gemeinsame Teiler von a und b ein Teiler von a und b ist enthält diese Menge bereits a und b und da es sich um eine Untergruppe handelt, haben wir die kleinste Untergruppe die M_4 enthält gefunden.

□

Aufgabe 4: Für eine kommutative Gruppe $(G, \circ)$ mit zwei Untergruppen $M, N \subseteq G$ definieren wir die Menge $M \circ N = \{m \circ n \mid m \in M, n \in N\}$.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei $M \circ N$ um eine Untergruppe von $(G, \circ)$ handelt.

(b) Sei G die Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit Matrixmultiplikation.

(i) Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass G nicht kommutativ ist.

($\star$) (ii) Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Zeigen Sie, dass M und N Untergruppen von G sind.

($\star$) (iii) Zeigen Sie, dass hier $M \circ N$ keine Untergruppe von G ist.

Lösungsvorschlag. (a) Eine Möglichkeit zu zeigen, dass es sich um eine Untergruppe handelt ist, dass für $a, b \in U$ sowohl a^{-1} als auch ab wieder in U liegen.

Zunächst überlegen wir uns kurz, dass die Menge nicht leer ist. Da M, N Untergruppen sind, enthalten beide das neutrale Element e und somit gilt $e = e \circ e \in \ M \circ N$.

Seien nun $a, b \in M \circ N$. Nach Definition finden wir $m_a, m_b \in M$ und $n_a, n_b \in N$ sodass $a = m_a \circ n_a$ und $b = m_b \circ n_b$.

Es gilt, dass

$$a^{-1} = (m_a \circ n_a)^{-1} = n_a^{-1} \circ m_a^{-1} = m_a^{-1} \circ n_a^{-1} \in M \circ N,$$

wobei die letzte Aussage folgt, da $m_a^{-1} \in M$ und $n_a^{-1} \in N$.

Ähnlich gilt

$$a \circ b = (m_a \circ n_a) \circ (m_b \circ n_b) = (m_a \circ m_b) \circ (n_a \circ n_b) \in M \circ N,$$

wobei wir zunächst Assoziativität und Kommutativität benutzt haben und dann, dass $m_a \circ m_b \in M$ und $n_a \circ n_b \in N$.

(b) (i) Mit den Rechenregeln über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ erhalten wir, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixmultiplikation ist also auch hier nicht kommutativ.

(ii) Bei zweielementigen Teilmengen von Gruppen, handelt es sich genau dann um eine Untergruppe, falls das eine Element das neutrale Element ist und das andere Element Selbstinvers.

Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element, und es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit handelt es bei M um eine Untergruppe. Analog zeigt man, dass auch N eine Untergruppe ist.

(iii) Wir geben $M \circ N$ konkret an.

$$\begin{aligned} M \circ N &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Als Untergruppe, müsste $M \circ N$ abgeschlossen bezüglich Multiplikation sein. Da sie die beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ enhält, müsste sie also auch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

enhalten. Das tut sie aber nicht und ist somit keine Untergruppe.

$\square$