MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2022/23

Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Tutoriumsblatt 2b

Aufgabe 1: Jeder Bilinearform $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lässt sich bezüglich der Standardbasis eindeutig eine darstellende 3×3 Matrix A_b zuordnen. Sei b nun eine beliebige Bilinearform. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $\forall v \in \ker A_b : b(v, v) = 0$.

(b) $\forall w \in \mathbb{R}^3 \quad \forall v \in \ker A_b : b(w, v) = 0$.

(c) $\forall w \in \mathbb{R}^3 \quad \forall v \in \ker A_b : b(v, w) = 0$.

($\star$) (d) $\forall v \in \mathbb{R}^3 : b(v, v) = 0 \implies v \in \ker A$.

Aufgabe 2: Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit Standardbasis. Sei $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit darstellender Matrix A. Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis und B die darstellende Matrix von b bezüglich $\mathcal{B}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Falls A diagonalgestalt hat, gilt das auch für B.

(b) Falls A diagonalgestalt hat, ist B symmetrisch.

(c) Falls $\det A = 0$ dann gilt auch $\det B = 0$.

($\star$) (d) Falls alle Einträge von A größergleich Null sind, gilt das auch für B.

Aufgabe 3: Wir betrachten den fünfelementigen Körper K_5 und $V = K_5^3$. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

(a) Geben Sie die Anzahl der Element in U also $|U|$ in Abhängigkeit von $\dim U$ an.

(b) Zeigen Sie, dass U als Gruppe bezüglich $+$ genau dann zyklisch ist, wenn $\dim U \leq 1$.

Aufgabe 4: Es sei K_2 der zwei elementige Körper und $V = K_2^2$.

(a) Wie viele verschiedene Basen von V gibt es?

(b) Wie viele verschiedene Bilinearformen $V \times V \to K$ gibt es?

(c) Wie viele symmetrische Bilinearformen $V \times V \to K$ gibt es?

($\star$) (d) Geben Sie eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ sowie zwei Basen von V an, sodass b bezüglich beider Basen die gleiche darstellende Matrix hat.