Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Tutoriumsblatt 2b

Aufgabe 1: Jeder Bilinearform $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lässt sich bezüglich der Standardbasis eindeutig eine darstellende 3×3 Matrix A_b zuordnen. Sei b nun eine beliebige Bilinearform. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $\forall v \in \ker A_b : b(v, v) = 0.$

(b) $\forall w \in \mathbb{R}^3 \quad \forall v \in \ker A_b : b(w, v) = 0.$

(c) $\forall w \in \mathbb{R}^3 \quad \forall v \in \ker A_b : b(v, w) = 0.$

($\star$) (d) $\forall v \in \mathbb{R}^3 : b(v, v) = 0 \implies v \in \ker A.$

Lösungsvorschlag. Es gilt $b(x, y) = x^T A_b y$. Und zu jeder Matrix gibt es eine Bilinearform. Daher ist es okay, dass wir ab jetzt mit Matrizen weiterarbeiten.

(a) Die Aussage ist immer richtig. Für $v \in \ker A_b$ gilt $b(v, v) = v^T A_b v = v^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

(b) Richtig. Für $w \in \mathbb{R}^3$ und $v \in \ker A_b$ gilt $b(w, v) = w^T A_b v = w^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

(c) (im Allgemeinen) Falsch. Sei z.B. $A_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A \cdot v = 0$, also liegt $v \in \ker A_b$. Aber für $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$b(v, w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

(d) (im Allgemeinen) Falsch. Sei z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aber gleichzeitig

$$b(v,v) = v^T A v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 0 - 1 = 0.$$

$\square$

Aufgabe 2: Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit Standardbasis. Sei $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit darstellender Matrix A. Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis und B die darstellende Matrix von b bezüglich $\mathcal{B}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Falls A diagonalgestalt hat, gilt das auch für B.

(b) Falls A diagonalgestalt hat, ist B symmetrisch.

(c) Falls $\det A = 0$ dann gilt auch $\det B = 0$.

($\star$) (d) Falls alle Einträge von A größergleich Null sind, gilt das auch für B.

Lösungsvorschlag. Im folgenden gilt $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Falsch! So gilt für das Standartskalarprodukt mit $A = \mathbb{E}_2$ und die Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 \right\}$, dass $b(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2) = 1 \neq 0$. Die Matrix verliert also ihre Diagonalgestalt.

(b) Richtig! Matrizen in Diagonalform sind symmetrisch und, dass Symmetrie der darstellenden Matrix unter Basiswechsel erhalten bleibt, hatten wir in der Vorlesung

(c) Richtig! Für die Basiswechselmatrix M gilt $B = M^T A M$. Falls $\det A = 0$ folgt also

$$\det(B) = \det(M^T A M) = \det(M^T) \det(A) \det(M) = 0.$$

($\star$) (d) Nein! Sei b die Bilinearform mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt für $\mathcal{B} = \{e_1, -e_2\}$, dass $b(e_1, e_1) = b(-e_2, -e_2)$ und $b(e_1, -e_2) = b(-e_2, e_1) = -1$. Als darstellende Matrix ergibt sich also $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\square$

Aufgabe 3: Wir betrachten den fünfelementigen Körper K_5 und $V = K_5^3$. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

(a) Geben Sie die Anzahl der Element in U also $|U|$ in Abhängigkeit von $\dim U$ an.

(b) Zeigen Sie, dass U als Gruppe bezüglich $+$ genau dann zyklisch ist, wenn $\dim U \leq 1$.

Lösungsvorschlag. (a) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von U. Wir können jedes $u \in U$ eindeutig als Linearkombination des Basisvektoren schreiben. Es gibt $\dim U$ Basisvektoren und K_5 bietet 5 verschiedene skalare Vorfaktoren. Also erhalten wir $|U| = 5^{\dim U}$.

(b) Für $\dim U = 0$, gilt $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und ist offensichtlich zyklisch. Für $\dim U = 1$ gilt

$$U = \{\lambda u \mid \lambda \in K_5\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$$

wobei $\{u\}$ eine mögliche Basis von U ist. Auch diese Untergruppe ist quasi per Definition zyklisch. Für $\dim U \geq 2$, gilt $|U| > 5$. Für jede potentielle zyklische Gruppe

$$G = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} = \{\lambda u \mid \lambda \in K_5\}$$

gilt $|G| \leq 5$. Aus Platzgründen kann U also für $\dim U = 2$ oder $\dim U = 3$ nicht zyklisch sein.

$\square$

Aufgabe 4: Es sei K_2 der zwei elementige Körper und $V = K_2^2$.

(a) Wie viele verschiedene Basen von V gibt es?

(b) Wie viele verschiedene Bilinearformen $V \times V \to K$ gibt es?

(c) Wie viele symmetrische Bilinearformen $V \times V \to K$ gibt es?

($\star$) (d) Geben Sie eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ sowie zwei Basen von V an, sodass b bezüglich beider Basen die gleiche darstellende Matrix hat.

Beweis.

(a) Als potentielle Basisvektoren kommen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Frage. Wir brauchen 2 verschiedene Basisvektoren und Reihenfolge ist wichtig, also gibt es $3 \cdot 2 = 6$ Basen.

(b) Jede Bilinearform korrespondiert nach Fixierung einer Basis zu genau einer Matrix. Die Matrix hat 4 Einträge und bei jedem Eintrag haben wir zwei Möglichkeiten, also gibt es $2^4 = 16$ mögliche Matrizen und damit auch 16 mögliche Bilinearformen.

(c) Wie in (b) betrachten wir die Matrizen. Diesmal muss der Eintrag oben rechts gleich dem Eintrag unten links sein. Wir haben also ein Eintrag weniger den wir wählen können und erhalten $2^3 = 8$ symmetrische Matrizen und damit auch 8 symmetrische Bilinearformen.

($\star$) (d) Sei b die Bilinearform mit darstellender Matrix $A = \mathbb{E}_2$ bezüglich der Basis $\{e_1, e_2\}$. Wenn wir nun die Basis $\{e_2, e_1\}$ betrachten, überprüft man leicht, dass sich die darstellende Matrix nicht ändert. $\square$