Hausaufgaben zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Tutoriumsblatt 3a

Aufgabe 1: Wir betrachten die Gruppe der reellen invertirbaren 2×2 Matrizen.

(a) Geben Sie die Menge aller Matrizen an, die mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ kommutieren.

(b) Bestimmen Sie analog, die Menge der Matrizen die mit $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ kommutieren und schließen Sie auf die Menge der Matrizen die mit allen 2×2 Matrizen kommutieren.

Aufgabe 2: (a) Zeige, dass die Menge der reellen 2×2 Diagonalmatrizen D, also Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit $a, b \neq 0$, eine Untergruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen bildet.

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei der Abbildung $f : D \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gegeben durch $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \frac{a}{d}$ um einen Gruppenhomomorphismus von $(D, \cdot)$ nach $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ handelt. Hier bezeichnet $\cdot$ die Matrixmultiplikation bzw. das Produkt reeller Zahlen.

($\star$) (c) Ist die Abbildung injektiv beziehungsweise surjektiv?

Aufgabe 3: (a) Geben Sie einen Gruppenhomomorphismus von $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ an.

($\star$) (b) Geben Sie einen Gruppenisomorphismus $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ an, der eingeschränkt auf $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ kein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4: Sei G eine endliche Gruppe. Für $g \in G$ schreiben wir $o(g) := | < g > |$ für die Ordnug von g.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $g^n = e$, wobei e das neutrale Element ist.

($\star$)(b) Zeigen Sie, dass $o(g)$ die kleinste natürliche Zahl mit $g^{o(g)} = e$ ist.