Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Tutoriumsblatt 3b

Aufgabe 1: Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Finden Sie eine Matrix B, sodass $B^T AB$ diagonalgestalt hat.

(b) Es sei $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Bilinearform mit darstellender Matrix A bezüglich der Standardbasis. Geben Sie eine Basis an bezüglich derer die darstellende Matrix diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2: (a) Zeigen Sie, dass auf der Menge der reellen 2×2 Matrizen durch $b(A, B) = (AB)_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ eine Bilinearform definiert ist.

($\star$) (b) Ist b symmetrisch?

Aufgabe 3: Sei $a : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ heißt orthogonal bzgl. a, falls $a(b_1, b_2) = a(b_2, b_1) = 0$.

(a) Sei b_1, b_2 eine beliebige Basis mit $a(b_1, b_1) \neq 0$. Weiter sei a symmetrisch. Zeigen Sie, dass durch $\{b_1, b_2 - \frac{a(b_1,b_2)}{a(b_1,b_1)} b_1\}$ eine orthogonale Basis gegeben ist.

($\star$) (b) Geben Sie eine Bilinearform $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so wie eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ an, sodass $a(b_1, b_1) \neq 0$, aber $\{b_1, b_2 - \frac{a(b_1,b_2)}{a(b_1,b_1)} b_1\}$ keine orthogonale Basis bezüglich a ist.

Aufgabe 4: Wir betrachten die Bilinearform $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $a(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$
Seien e_1, e_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechnen Sie $a(e_1, e_1)$ und $a(e_2, e_2)$.

(b) Begründen Sie, dass man das Verfahren aus Aufgabe 3 nicht verwenden kann, um aus der Standardbasis eine orthogonale Basis zu berechen.

(c) Geben Sie eine Basis an, die orthogonal bezüglich a ist oder begründen Sie, dass so eine Basis nicht existieren kann.