MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN
WiSe 2022/23

Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zum Tutoriumsblatt 3b

Aufgabe 1: Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Finden Sie eine Matrix B, sodass $B^T AB$ diagonalgestalt hat.

Lösungsvorschlag. Zunächst subtrahieren wir die letzte Spalte/Zeile zwei mal von der zweiten Spalte/Zeile. In Matrixnotation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes addieren wir die zweite Spalte/Zeile einmal zur ersten Spalte/Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

gefunden. □

(b) Es sei $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Bilinearform mit darstellender Matrix A bezüglich der Standardbasis. Geben Sie eine Basis an bezüglich derer die darstellende Matrix diagonalgestalt hat.

Lösungsvorschlag. Wir können die Basis direkt aus (a) ablesen. Denn B ist genau die Basiswechselmatrix von der Standardbasis in die Basis bezüglich der die Bilinearform die Diagonalmatrix als darstellende Matrix hat. Die Basis ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nennen wir diese Basiselemente b_1, b_2, b_3 kann man zum Beispiel überprüfen, dass $b_3^T A b_3 = 1$ oder dass $b_1^T A b_1 = 4$. $\square$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: (a) Zeigen Sie, dass auf der Menge der reellen 2×2 Matrizen durch $b(A, B) = (AB)_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ eine Bilinearform definiert ist.

Beweis. Es gilt $b(A, B+\lambda C) = (A(B+\lambda C))_{11} = (AB)_{11}+\lambda(AC)_{11} = b(A, B)+\lambda(A+\lambda C)$. Wobei wir genutzt haben, dass $A(B + \lambda C) = AB + \lambda AC$ also insbesondere ihr Eintrag oben Links übereinstimmen müssen, und dass man bei der Matrixaddition die entsprechenden Einträge addiert.

Die Linearität im zweiten Argument folgt analog. $\square$

($\star$) (b) Ist b symmetrisch?

Lösungsvorschlag. Nein, denn für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $b(A, B) = 1$ aber $b(B, A) = 2$.

$\square$

Aufgabe 3: Sei $a : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ heißt orthogonal bzgl. a, falls $a(b_1, b_2) = a(b_2, b_1) = 0$.

(a) Sei b_1, b_2 eine beliebige Basis mit $a(b_1, b_1) \neq 0$. Weiter sei a symmetrisch. Zeigen Sie, dass durch $\{b_1, b_2 - \frac{a(b_1,b_2)}{a(b_1,b_1)} b_1\}$ eine orthogonale Basis gegeben ist.

Lösungsvorschlag. Es gilt

$$a(b_1, b_2 - \frac{a(b_1, b_2)}{a(b_1, b_1)} b_1) = a(b_1, b_2) - \frac{a(b_1, b_2)}{a(b_1, b_1)} a(b_1, b_1) = 0.$$

Da a symmetrisch ist, ist die Basis damit orthogonal bezüglich a. $\square$

($\star$) (b) Geben Sie eine Bilinearform $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so wie eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ an, sodass $a(b_1, b_1) \neq 0$, aber $\{b_1, b_2 - \frac{a(b_1,b_2)}{a(b_1,b_1)} b_1\}$ keine orthogonale Basis bezüglich a ist.

Lösungsvorschlag. Wegen Aufgabenteil (a) suchen wir nach eine nicht symmetrischen Matrix. Wir betrachten die Bilinearform a mit darstellende Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dann gilt mit der Standardbasis $b_1 = e_1, b_2 = e_2$, dass $a(e_1, e_1) = 1$ und $a(e_1, e_2) = 0$.

Aber die Basis $e_1, e_2 - 0 \cdot e_1 = e_2$ ist keine orthogonale Basis, da $a(e_2, e_1) = 1$.

Tatsächlich kann es keine orthogonale Basis zu dieser Bilinearform geben, sonst wäre sie nämlich diagonalisierbar. Mehr dazu auf dem Hausaufgabenblatt. $\square$

Aufgabe 4: Wir betrachten die Bilinearform $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $a(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$ Seien e_1, e_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechnen Sie $a(e_1, e_1)$ und $a(e_2, e_2)$.

Lösungsvorschlag. Man berechnet leicht, oder sieht direkt an der darstellenden Matrix, dass $a(e_1, e_1) = a(e_2, e_2) = 0$. □

(b) Begründen Sie, dass man das Verfahren aus Aufgabe 3 nicht verwenden kann, um aus der Standardbasis eine orthogonale Basis zu berechen.

Lösungsvorschlag. Da $a(e_1, e_1) = a(e_2, e_2) = 0$, können wir die Formel nicht anwenden, da wir durch $a(e_1, e_1)$ teilen müssten. Wäre $a(e_2, e_2)$ nicht null könnten wir die Rollen tauschen und die Formel doch anwenden. □

(c) Geben Sie eine Basis an, die orthogonal bezüglich a ist oder begründen Sie, dass so eine Basis nicht existieren kann.

Lösungsvorschlag. Da die Matrix symmetrisch ist, muss es eine orthogonale Basis geben. Mit etwas Rechnung (vgl. Aufgabe 1) oder taktisches Raten sieht man, dass für $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt, dass $a(b_1, b_2) = a(b_2, b_1) = 0$. □