Übungen zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Tutoriumsblatt 4a

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Es sei G die Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen über K_2 bezüglich Matrixmultiplikation.

(a) Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ jeweils selbstinvers sind.

(b) Geben Sie für die Untergruppe $U = \{\mathbb{E}_2, A\}$, die Linksnebenklasse $B \cdot U$ sowie die Rechtsnebenklasse $U \cdot B$ an.

(c) Handelt es sich bei U um einen Normalteiler?

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: Wir betrachten die Gruppe $G = K_3 \times K_3$ mit Addition. Es gilt also zum Beispiel $(1, 2) + (2, 2) = (0, 1)$.

(a) Wie viele Elemente hat G?

(b) Geben Sie die von $(1, 1)$ und $(1, 2)$ erzeugten Untergruppen in G an.

(c) Geben Sie alle 6 Untergruppen von G an.

($\star$) (d) Ist G zyklisch? Welche der Untergruppen sind Normalteiler? Gibt es ein Selbstinverses Element in G?

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Es sei G die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen bezüglich Matrixmultiplikation.

(a) Zeigen Sie, dass die Determinante ein Gruppenhomomorphimus von $G \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Untergruppe der Matrizen mit Determinante 1 ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Falls $|G| = p$ für eine Primzahl p gilt, so ist G abelsch.

($\star$) (b) Falls für alle $g \in G$ gilt, dass $g^2 = e_G$, dann ist G abelsch.