MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2022/23

Übungen zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Tutoriumsblatt 4a

Aufgabe 1: Es sei G die Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen über K_2 bezüglich Matrixmultiplikation.

(a) Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ jeweils selbstinvers sind.

Lösungsvorschlag. Es gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Damit sind beide Matrizen selbstinvers.

□

(b) Geben Sie für die Untergruppe $U = \{\mathbb{E}_2, A\}$, die Linksnebenklasse $B \cdot U$ sowie die Rechtsnebenklasse $U \cdot B$ an.

Lösungsvorschlag. Es gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Damit ist die Linksnebenklasse

$$B \cdot U = \{B \cdot \mathbb{E}, B \cdot A\} = \left\{ B, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und die Rechtsnebenklasse

$$U \cdot B = \{\mathbb{E} \cdot B, A \cdot B\} = \left\{ B, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

(c) Handelt es sich bei U um einen Normalteiler?

Lösungsvorschlag. Da die Links und die Rechtsnebenklasse nicht übereinstimmen, handelt es sich bei U nicht um einen Normalteiler. □

Aufgabe 2: Wir betrachten die Gruppe $G = K_3 \times K_3$ mit Addition. Es gilt also zum Beispiel $(1, 2) + (2, 2) = (0, 1)$.

(a) Wie viele Elemente hat G?

Lösungsvorschlag. Drei Möglichkeiten für den ersten Eintrag, drei für den zweiten Eintrag. Also $3 \cdot 3 = 9$ Elemente. □

(b) Geben Sie die von $(1,1)$ und $(1,2)$ erzeugten Untergruppen in G an.

Lösungsvorschlag. Es gilt

$$< (1,1) >= \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$$

und

$$< (1,2) >= \{(0,0), (1,2), (2,1)\}.$$

□

(c) Geben Sie alle 6 Untergruppen von G an.

Lösungsvorschlag. Es gibt wie bei jeder Gruppe die Untergruppen $\{(0,0)\}$ mit nur dem neutralen Element, und die ganze Gruppe G. Außerdem gibt es die beiden Gruppen aus (b)

$$< (1,1) >= \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$$

und

$$< (1,2) >= \{(0,0), (1,2), (2,1)\}$$

sowie die zwei weiteren Gruppen

$$< (0,1) >= \{(0,0), (0,1), (0,2)\}$$

und

$$< (1,0) >= \{(0,0), (1,0), (2,0)\}.$$

□

($\star$) (d) Ist G zyklisch? Welche der Untergruppen sind Normalteiler? Gibt es ein Selbstinverses Element in G?

Lösungsvorschlag. G ist nicht zyklisch, denn jedes Element (außer dem neutralen Element) hat Ordnung 3. Das sieht man auch daran, dass jedes Element in einer Untergruppe enthalten ist, die nicht G ist.

Alle Untergruppen sind Normalteiler, da die Gruppe abelsch ist.

Nein, es gibt kein Selbstinverses Element. Denn ein selbstinverses Element hat Ordnung 2 und wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die Ordnung von allen Elementen die Ordnung der Gruppe, also in diesem Fall 9 teilen muss. □

Aufgabe 3: Es sei G die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen bezüglich Matrixmultiplikation.

(a) Zeigen Sie, dass die Determinante ein Gruppenhomomorphimus von $G \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

Lösungsvorschlag. Das die Determinante ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt direkt aus

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

$\square$

(b) Zeigen Sie, dass die Untergruppe der Matrizen mit Determinante 1 ein Normalteiler von G ist.

Lösungsvorschlag. Die Matrizen mit Determinante Eins, sind genau der Kern der Determinantenabbildung. Damit sind sie nach Vorlesung ein Normalteiler.

Alternativ überlegt man sich kurz, dass für ein Matrix A mit Determinante 1 und eine beliebige Matrix B gilt, dass

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})\det(A)\det(B) = \det(A) = 1.$$

$\square$

a

Aufgabe 4: Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Falls $|G| = p$ für eine Primzahl p gilt, so ist G abelsch.

Lösungsvorschlag. Sei $g \in G$ ein Element, dass nicht das neutrale Element ist. Dann ist die Ordnung von g größer als 1. Aber die Ordnung muss p teilen und da p eine Primzahl ist, folgt, dass die Ordnung von g gleich p sein muss. Damit erzeugt g eine p elementige zyklische Untergruppe von G. Die einzige p elementige Untergruppe von G ist natürlich G selbst, also ist G zyklisch, und damit auch abelsch. $\square$

($\star$) (b) Falls für alle $g \in G$ gilt, dass $g^2 = e_G$, dann ist G abelsch.

Lösungsvorschlag. Es gilt also für alle $g \in G$, dass $g = g^{-1}$ Seien $a, b \in G$ beliebig. Dann gilt

$$ab = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} = ba.$$

Damit ist G abelsch. $\square$