

# Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl  
Kajetan Söhnen

## Tutoriumsblatt 4b

**Aufgabe 1** (2 Punkte): Bestimmen Sie den Annulator der Menge

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

*Beweis.* Wir suchen lineare Abbildungen die auf dem gesamten Span verschwinden. Aufgrund der Linearität reicht es allerdings Abbildungen zu suchen, die auf

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

angewendet Null ergeben. Damit wir auf dem ersten Vektor verschwinden bietet sich die Abbildung  $f(x) = x_1 - x_2$  an. Allerdings müssen wir diese zu  $f(x) = x_1 - x_2 + x_3$  ergänzen, damit sie auch auf dem zweiten Vektor verschwindet. Da wir wissen, dass der Annulator ein dimensional sein muss, ist er also durch

$$\text{span} \{f(x)\} = \{\lambda f(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

mit  $f(x) = x_1 - x_2 + x_3$  gegeben. □

**Aufgabe 2:** Sei  $\omega$  der Raum der reellen Folgen.

- a) Zeigen Sie, dass  $\omega$  mit der Addition von Folgen und skalarer Multiplikation ein **nicht** endlicher Vektorraum ist.

*Beweis.* Dass  $\omega$  die Vektorraumaxiome erfüllt ist leicht nachgewiesen. Um zu sehen, dass der Raum nicht endlich ist, stellen wir fest, dass die Folgen  $e^i$ , die an der  $i$ -ten Stelle eine Eins und sonst nur Nuller haben alle linearunabhängig sind. Damit ist der Raum unendlich dimensional. □

- b) Zeigen Sie, dass folgende Teilmengen von  $\omega$  Untervektorräume sind:

- (i) die Menge der Nullfolgen

(★) (ii) die Menge der beschränkten Folgen

(★) (iii) die Menge der absolut summierbaren Folgen, also  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mit  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ .

*Beweis.* Seien  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen aus dem entsprechenden Raum und  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$ . Wir müssen zeigen, dass  $\lambda a + b$  wieder im Unterraum liegt.

Für (i) wissen wir, dass  $\lim \lambda a_n + b_n = \lambda \lim a_n + \lim b_n = 0 + 0 = 0$ .

Für (ii) merken wir an, dass wenn  $a$  bzw.  $b$  durch  $C_a$  bzw.  $C_b$  beschränkt sind, dann  $\lambda a + b$  durch  $|\lambda|C_a + C_b$  beschränkt ist.

Für (iii) überlegen wir uns, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda a_n + b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|\lambda| |a_n| + |b_n|) = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

□

**Aufgabe 3:** Sei  $\omega^*$  der Dualraum zu  $\omega$ .

a) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge die schließlich Null wird, es gibt also ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass  $a_n = 0$  für  $n > N$ . Zeigen Sie, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  ein Element in  $\omega^*$  ist.

*Beweis.* Die Abbildung ist wohldefiniert, da die Folge schließlich verschwindet. Damit müssen wir uns nicht um eine Reihe sondern lediglich um eine endliche Summe kümmern.

Damit ist auch die Linearität sofort klar, denn sie folgt direkt aus der Distributivität und der Kommutativität der Summe. □

b) Sei nun  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.

(i) Zeigen Sie, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  diesmal keine Lineare Abbildung  $\omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist.

(★) (ii) Zeigen Sie, dass diese Zuordnung eine lineare Abbildung auf den absolut summierbaren Folgen definiert.

*Beweis.* Diese Abbildung ist nicht für alle Folgen wohldefiniert. Sei z.B.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Die Einträge kürzen sich jeweils und wir müssten unendlich oft die Eins aufaddieren. Hierbei erhalten wir keine reelle Zahl, die Abbildung ist also nicht wohldefiniert.

Für absolut summierbare Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist die Situation eine andere. Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als Nullfolge durch eine Konstante  $C$  beschränkt ist, folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Damit ist diese Reihe also absolut konvergent, woraus dann mit Analysis wissen wiederum die Linearität folgt. □

**Aufgabe 4:** Es seien  $U, W$  Untervektorräume eines endlichen Vektorraumes  $V$  über dem Körper  $K$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Zeigen oder widerlegen Sie

(a)  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

*Beweis.* Sei  $v \in (U + W)^\perp$ . Dann gilt insbesondere für alle  $u \in U \subseteq U + W$  und alle  $w \in W \subseteq U + W$ , dass  $\langle v, u \rangle = \langle v, w \rangle = 0$ . Also liegt  $v$  sowohl in  $U^\perp$  als auch in  $W^\perp$  also auch im Schnitt.

Sei nun umgekehrt  $v \in U^\perp \cap W^\perp$ . Wir wollen zeigen, dass  $v$  auf allen Elementen in  $U + W$  orthogonal steht. Sei dazu  $x = u + w \in U + W$  beliebig. Dann gilt

$$\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass  $v$  nach Annahme auf allen Elementen in  $U$  und auf allen Elementen in  $W$  orthogonal steht.  $\square$

(\*) (b)  $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

*Beweis.* Sei  $v \in U^\perp + W^\perp$ . Wir können also  $v = u^\perp + w^\perp$  mit  $u^\perp \in U^\perp$  und  $w^\perp \in W^\perp$  schreiben. Dann gilt für alle  $x \in U \cap W$ , dass

$$\langle v, x \rangle = \langle u^\perp, x \rangle + \langle w^\perp, x \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass  $x$  sowohl in  $U$  als auch in  $W$  liegt und dass  $u^\perp$  bzw.  $w^\perp$  orthogonal auf allen Elementen in  $U$  bzw.  $W$  stehen.

Anstatt dass wir die Rückrichtung direkt beweisen, zeigen wir dass beide Seiten die gleiche Dimensionen haben. Sei hierzu  $n$  die Dimension von  $V$ .

Es gilt

$$\dim(U \cap W)^\perp = n - \dim(U \cap W).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \dim(U^\perp + W^\perp) &= \dim U^\perp + \dim W^\perp - \dim(U^\perp \cap W^\perp) \\ &= n - \dim U + n - \dim W - \dim(U + W)^\perp \\ &= 2n - \dim U - \dim W - (n - \dim(U + W)) \\ &= n - \dim U - \dim W + (\dim U + \dim W - \dim U \cap W) \\ &= n - \dim U \cap W. \end{aligned}$$

Damit haben beide Seiten die gleiche Dimension und aufgrund des gezeigten Teilmengenverhältnisses folgt die Gleichheit.  $\square$