Übungen zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Tutoriumsblatt 5a

Aufgabe 1: Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Es sei $18\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ die Untergruppe der durch 18 teilbaren Zahlen

a) Bestimmen Sie alle Untergruppen in $\mathbb{Z}$, die $18\mathbb{Z}$ enthalten
b) Bestimmen Sie alle Untergruppen in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

Aufgabe 2: Sei G eine Gruppe mit Normalteiler $N \trianglelefteq G$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $g \mapsto \bar{g} = gN$ ein Gruppenhomomoprhismus $G \to G/N$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus surjektiv ist.
(b) Zeigen Sie, dass er nur für $N = \{e_G\}$ injektiv ist.
($\star$) (c) Geben Sie ein Beispiel an, in dem $g \mapsto \bar{g}$ nicht injektiv ist, G und G/N aber trotzdem - durch eine andere Abbildung - isomorph sind.

Aufgabe 3: Wir betrachten $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ mit eintragsweiser Multiplikation.

(a) Begründen Sie, dass G eine abelsche Gruppe ist.
(b) Zeigen Sie, dass $N = \{(x, x) \in G \mid x \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe von G ist.
(c) Zeigen Sie, dass G/N isomorph zu $\mathbb{R}^+$ ist.
($\star$) (d) Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 4: Wir betrachten die Gruppe $G = \{0, 1, \dots, 16, 17\}$ mit Addition modulo 18. Seien weiter $N = \{0, 2, 4, \dots, 14, 16\}$, $H = \{0, 9\}$ und $U = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$.

Bemerkung: In dieser Aufgabe nutzen wir die additive Notation $U + N$ statt UN sowie $z + N$ statt zN für die Nebenklasse.

(a) Geben Sie die Gruppen $H + N = \{h + n \mid h \in H, n \in N\}$ sowie $U + N$ an.
(b) Zeigen Sie, dass $f : H \to (H + N)/N, z \mapsto z + N$ ein Isomorphismus ist.
(c) Zeigen Sie, dass $g : U \to (U + N)/N, z \mapsto u + N$ kein Isomorphismus ist.