Übungen zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Tutoriumsblatt 5a

Aufgabe 1: Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Es sei $18\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ die Untergruppe der durch 18 teilbaren Zahlen.

a) Bestimmen Sie alle Untergruppen in $\mathbb{Z}$, die $18\mathbb{Z}$ enthalten

Lösungsvorschlag. Die Untergruppen werden genau durch die Teiler von 18 erzeugt, also $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}, 9\mathbb{Z}$ und $18\mathbb{Z}$. □

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

Lösungsvorschlag. Die Untergruppen entsprechen nach Vorlesung genau den Untergruppen aus (a). Schreiben wir wie üblich

$$\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, 16, 17\}$$

sind die Untergruppen (in gleicher Reihenfolge wie in (a)) $\{0, 1, 2, \dots, 16, 17\}$, $\{0, 2, 4 \dots, 14, 16\}$, $\{0, 3, 9, 12, 15\}$, $\{0, 6, 12\}$, $\{0, 9\}$ und $\{0\}$. □

Aufgabe 2: Sei G eine Gruppe mit Normalteiler $N \trianglelefteq G$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $g \mapsto \bar{g} = gN$ ein Gruppenhomomoprhismus $G \to G/N$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus surjektiv ist.

Lösungsvorschlag. Die Abbildung ist quasi per Definition surjektiv. Jede Nebenklasse gN wird durch $g \mapsto gN$ getroffen. □

(b) Zeigen Sie, dass er nur für $N = \{e_G\}$ injektiv ist.

Lösungsvorschlag. Falls $N \neq \{e_G\}$ ist, finden wir $e_G \neq n \in \mathbb{N}$ und entsprechend auch $n^{-1} \in \mathbb{N}$. Damit enthält die Nebenklasse nN auch $nn^{-1} = e_G$ und muss damit (da verschiedene Nebenklassen disjunkt sind) bereits die Nebenklasse e_GN sein. Damit haben e_G und n das gleich Bild, die Abbildung ist also nicht injektiv. □

($\star$) (c) Geben Sie ein Beispiel an, in dem $g \mapsto \bar{g}$ nicht injektiv ist, G und G/N aber trotzdem isomorph sind.

Beweis. Wir betrachten das Halboffene Intervall $G = [0, 1)$ mit Addition modulo $\mathbb{Z}$. Also z.B. $0.85 + 0.4 = 1.25 = 0.25$. Man überprüft leicht, dass es sich hierbei um eine abelsche Gruppe handelt.

Wir betrachten die Untergruppe $N = \{0, 0.5\}$. Da N nicht nur das neutrale Element enthält ist die natürliche Abbildung nicht injektiv. Aber $G \to G/N$ mit $g \mapsto \frac{1}{2}gN$ ist ein Isomorphismus. Injektivität folgt, da für alle $0 < g < 1$ gilt, dass $0 < \frac{1}{2}g < 0.5$ und surjektivität folgt, da alle Nebenklassen die Form $x, x + 0.5$ haben mit $0 \leq x < 0.5$. □

Aufgabe 3: Wir betrachten $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ mit eintragsweiser Multiplikation.

(a) Begründen Sie, dass G eine abelsche Gruppe ist.

Lösungsvorschlag. Das neutrale Element ist $(1, 1)$, die Gruppeneigenschaften folgen direkt aus denen von $\mathbb{R}^+$. □

(b) Zeigen Sie, dass $N = \{(x, x) \in G \mid x \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe von G ist.

Lösungsvorschlag. Wir betrachten also Elemente der Form (x, x). Das neutrale Element $(1, 1)$ hat diese Form, und das Produkt von (x, x) mit (y, y) ist (xy, xy) und hat auch diese Form. Das Inverse ist $(\frac{1}{x}, \frac{1}{x})$ und hat somit wieder die gewünschte Form. □

(c) Zeigen Sie, dass G/N isomorph zu $\mathbb{R}^+$ ist.

Lösungsvorschlag. Wir betrachten die Abbildung $f : G \to \mathbb{R}^+$, $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$. Diese Abbildung ist surjektiv, da $f(1, x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Kern, also die Elemente die auf das neutrale Element $1 \in \mathbb{R}^+$ abbgebildet werden, ist genau N. Damit gilt nach Homomorphiesatz: $G/N \cong \mathbb{R}^+$. □

($\star$) (d) Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Lösungsvorschlag. Jeder Punkt $(x, y) \in G$ definiert eine Ursprungsgerade in $\mathbb{R}^2$ mit positiver Steigung $\frac{y}{x}$. Unsere Abbildung ordnet jedem Punkt diese Steigung zu. Zwei Punkte definieren die gleiche Steigung, falls sie auf der gleichen gerade liegen, falls es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$. Genau diese mehrfach Nennung Teilen wir aus G heraus, indem wir N herausteilen. Denn falls zwei Punkte auf der gleichen Gerade liegen, liegen sie in der gleichen Nebenklasse bezüglich N. G/N ist also die Menge der Geraden mit positiver Steigung und unsere Isomorphie ordnet den Geraden ihre Steigung zu. □

Aufgabe 4: Wir betrachten die Gruppe $G = \{0, 1, \ldots, 16, 17\}$ mit Addition modulo 18. Seien weiter $N = \{0, 2, 4, \ldots, 14, 16\}$, $H = \{0, 9\}$ und $U = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$.

Bemerkung: In dieser Aufgabe nutzen wir die additive Notation $U + N$ statt UN sowie $z + N$ statt zN für die Nebenklasse.

(a) Geben Sie die Gruppen $H + N = \{h + n \mid h \in H, n \in N\}$ sowie $U + N$ an.

Lösungsvorschlag. Es gilt $H + N = G$, da die Untergruppe $1 = 9 - 10 = 19 = 1$ enthalten muss, und mit dem gleichen Argument $U + N = G$. $\square$

(b) Zeigen Sie, dass $f : H \to (H + N)/N, z \mapsto z + N$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. Wir betrachten also die Abbildung $H \to G/N$. Die Abbildung ist injektiv, da der Kern der Projektion genau N ist. Aber das einzige Element in H was auch in N liegt ist die 0.

Die Abbildung ist auch surjektiv. Da $|N| = 9$ und $|G| = 18$ hat G/N nur 2 Elemente, genau wie $|H|$.

Damit folgt die Surjektivität direkt aus der Injektivität. $\square$

(c) Zeigen Sie, dass $g : U \to (U + N)/N, z \mapsto u + N$ kein Isomorphismus ist.

Lösungsvorschlag. Die Abbildung ist nicht injektiv, da nicht nur 0 auf die Nebenklasse $0 + N$ sonderen auch 6 und 12 alle die gleiche Nebenklasse erzeugen. Das Problem ist dass diesmal der Schnitt $U \cap N$ nicht nur die 0 enthält. $\square$