Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Tutoriumsblatt 5b

Aufgabe 1: Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $V \otimes V$ die reellen 2×2 Matrizen sind, mit

$$v_1 \otimes v_2 = \varphi(v_1, v_2) = v_1 v_2^t.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ weder injektiv noch surjektiv ist.

($\star$) (b) Gibt es K und V , sodass $\varphi : V \times V \to V \otimes V$ injektiv/surjektiv ist?

Aufgabe 2: Weiter im Setting von Aufgabe 1.

(a) Geben Sie zu folgenden Basen von $\mathbb{R}^2$, die zugehörigen Basen der 2×2 Matrizen an.

(i) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{a_1, a_2\}$

(ii) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{b_1, b_2\}$

(b) Stellen Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ jeweils in den Basen aus (a) dar.

Aufgabe 3: Seien $V_1, \dots V_n$ Vektorräume über einem Körper K und $f_1, \dots f_n$ lineare Abbildungen $f_i : V_i \to K$. Zeigen Sie, dass

$$F(v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(v_i)$$

multilinear ist.

Aufgabe 4: Sei $\mathbb{R}[x, y]$ der Raum der Polynome in 2 Variablen über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[y] \to \mathbb{R}[x, y], (p(x), q(y)) \mapsto p(x^2)q(y)$ multilinear ist.

($\star$) (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[x, y]$ mit diesem φ nicht $\mathbb{R}[x] \otimes \mathbb{R}[y]$ ist.