Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Tutoriumsblatt 5b

Aufgabe 1: Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $V \otimes V$ die reellen 2×2 Matrizen sind, mit

$$v_1 \otimes v_2 = \varphi(v_1, v_2) = v_1 v_2^t.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ weder injektiv noch surjektiv ist.

Beweis. Es gilt $0 \otimes 1 = 0 \otimes 0$ also ist die Abbildung nicht injektiv. Um zu sehen, dass die Abbildung nicht surjektiv ist betrachten wir

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}.$$

Wenn wir eine Matrix darstellen wollen, die unten rechts eine 0 hat, muss $b = 0$ oder $d = 0$ gelten. Das heißt wenn man sich die Struktur der Matrix anschaut, dass sich die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nie direkt treffen lässt. Alternativ kann man auch allgemeiner ein Rangargument machen (vgl. Vorlesung). □

($\star$) (b) Gibt es K und V , sodass $\varphi : V \times V \to V \otimes V$ injektiv/surjektiv ist?

Beweis. Die Abbildung kann nie injektiv sein, wie wir bereits in (a) gesehen haben. Surjektivität ist im Fall $V = K$ gegeben. In diesem Fall ist $K \otimes K$ der Raum der 1×1 Matrizen über K, also einfach K selbst. Und man kann jede 1×1 Matrix durch $x \otimes 1 = x$ darstellen. □

Aufgabe 2: Weiter im Setting von Aufgabe 1.

(a) Geben Sie zu folgenden Basen von $\mathbb{R}^2$, die zugehörigen Basen der 2×2 Matrizen an.

(i) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{a_1, a_2\}$

(ii) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{b_1, b_2\}$

Beweis. $a_1a_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_1a_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$a_2a_1^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_2a_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Weiter $b_1b_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_1a_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,$a_2a_1^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2a_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

(b) Stellen Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ jeweils in den Basen aus (a) dar.

Beweis. Mit der Basis $\mathcal{A}$ addiert man alle 4 Basismatrizen auf, mit der Basis $\mathcal{B}$ ist es einfach direkt die erste Basismatrix. □

Aufgabe 3: Seien $V_1, \dots V_n$ Vektorräume über einem Körper K und $f_1, \dots f_n$ lineare Abbildungen $f_i : V_i \to K$. Zeigen Sie, dass

$$F(v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(v_i)$$

multilinear ist.

Beweis. Sei $j \in \{0, \dots n\}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j + \lambda\hat{v}_j, v_{j+1}, \dots, v_n) &= \prod_{i=1}^{j-1} f_i(v_i) \qquad \cdot (f_j(v_j + \lambda\hat{v}_j)) \cdot \prod_{j+1}^{n} f_i(v_i) \\ &= \prod_{i=1, i\neq j}^{n} f_i(v_i) \cdot \Big(f_j(v_j) + \lambda f_j(\hat{v}_j) \Big) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f_i(v_i) + \lambda \prod_{i=1, i\neq j}^{n} f_i(v_i) \cdot f_j(\hat{v}_j) \\ &= F(v_1, \dots, v_n) + \lambda F(v_1, \dots, v_{j-1}, \hat{v}_j, v_{j+1}, \dots, v_n). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4: Sei $\mathbb{R}[x, y]$ der Raum der Polynome in 2 Variablen über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[y] \to \mathbb{R}[x, y], (p(x), q(y)) \mapsto p(x^2)q(y)$ multilinear ist.

Beweis. Die Abbildung $q(y) \mapsto q(y)$ ist offensichtlich linear, die Abbildung $p(x) \mapsto p(x^2)$ ist ebenfalls linear, da für $(p+\lambda\hat{p})(x^2) = p(x^2)+\lambda\hat{p}(x^2)$. Damit ist die Abbildung nach Aufgabe 3 bilinear. □

($\star$) (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[x, y]$ mit diesem φ nicht $\mathbb{R}[x] \otimes \mathbb{R}[y]$ ist.

Beweis. Angenommen $\mathbb{R}[x, y]$ mit diesem φ wäre eine Realisation des Tensorprodukts. Wir betrachten $\mathbb{R}[x, y]$ mit der üblichen Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[y] \to \mathbb{R}[x, y], (p(x), q(y)) \mapsto p(x)q(y).$$

In der Vorlesung haben wir bewiesen, dass die beiden Version vom Tensorprodukt Isomorph sein müssten. Wir wissen sogar, dass der Isomorphismus aus den jeweiligen Universellen Eigenschafen entsteht. Es müsste also ein lineares, bijektives f von $\mathbb{R}[x, y]$ (mit ϕ) nach $\mathbb{R}[x, y]$ (mit φ) geben, sodass

$$f(x^n y^m) = f \circ \phi(x^n, y^m) = \varphi(x^n, y^m) = x^{2n} y^m.$$

Hier sieht man, dass f nicht surjektiv sein kann. Denn welches Polynom wird auf das simple Polynom $p(x, y) = x$ abgebildet? Es geht nicht, da f genau alle x durch x^2 ersetzt. Eine ungerade x Potenz wird somit unmöglich.

Damit kann es sich bei $\mathbb{R}[x, y]$ mit diesem φ nicht um das Tensorprodukt handeln. Wir sehen, dass nicht nur der Raum sondern auch die Abbildung essentiell für das Tensorprodukt ist. $\square$