MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2022/23

Übungen zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Tutoriumsblatt 6a

Aufgabe 1: Sei S_n die symmetrische Gruppe aus Permutation von $n \geq 2$ Elementen. Seien $x_1, x_2 \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise verschieden. Wir betrachten die Transposition $(x_1\ x_2)$, die x_1 und x_2 tauscht. Sei $\pi \in S_n$ eine beliebige Permutation.

(a) Zeigen Sie, dass $\pi \circ (x_1\ x_2) \circ \pi^{-1} = (\pi(x_1)\ \pi(x_2))$.

Lösungsvorschlag. Wir überlegen uns dass die Permutation Links nur $\pi(x_1)$ und $\pi(x_2)$ tauscht und damit genau die Transposition Rechts ist. Sei zunächst $y \neq \pi(x_1), \pi(x_2)$. Da π eine Permutation und somit bijektiv ist, ist $\pi^{-1}(y)$ ungleich x_1 und ungleich x_2. Das heißt im zweiten Schritt passiert hier nichts. Danach wenden wir π an und erhalten $\pi(\pi^{-1}(y)) = y$. Für $\pi(x_1)$ gilt $\pi^{-1}(\pi(x_1)) = x_1$. Im zweiten Schritt tauschen wir x_1 und x_2. Im letzten schritt wenden wir π an und erhalten also $\pi(x_2)$. Genau so erhält man, dass $\pi(x_2)$ auf $\pi(x_1)$ abgebildet wird. □

(b) Berechnen Sie in S_4 : $(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2)(4\ 3\ 2\ 1)$

Lösungsvorschlag. Mit Aufgabenteil (a) erhält man sofort $(2\ 3)$ als Ergebnis. □

(c) Seien zusätzlich $y_1, y_2 \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass

$$\pi \circ (x_1\ x_2)(y_1\ y_2) \circ \pi^{-1} = (\pi(x_1)\ \pi(x_2))(\pi(y_1)\ \pi(y_2)).$$

Lösungsvorschlag. Um Aufgabenteil (a) zu nutzen schreiben wir um

$$\pi \circ (x_1\ x_2)(y_1\ y_2) \circ \pi^{-1} = \pi \circ (x_1\ x_2)\pi^{-1}\pi(y_1\ y_2) \circ \pi^{-1}.$$

Damit folgt die Aussage sofort aus Aufgabenteil (a). □

Aufgabe 2: Wir betrachten die Untergruppe $A_4 \leq S_4$ der geraden Permutationen in S_4.

(a) Wie viele Elemente hat S_4 bzw. A_4?

Lösungsvorschlag. S_4 hat 24 und A_4 hat 12 Elemente. □

(b) Zeigen Sie: $U = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ ist Untergruppe in A_4.

Lösungsvorschlag. Das neutrale Element ist enthalten und alle Elemente sind selbstinvers. Es bleibt zu überprüfen, dass U abgeschlossen bzgl. Verknüpfung ist. Es gilt

$$(1\ 2)(3\ 4)(1\ 3)(2\ 4) = (1\ 4)(2\ 3).$$

und

$$(1\ 2)(3\ 4)(1\ 4)(2\ 3) = (1\ 3)(2\ 4)$$

Da U mit seinen 4 Elementen abelsch sein muss, folgt aus diesen zwei Rechnungen bereits die Abgeschlossenheit bzgl. Verknüpfung. □

(c) Zeigen Sie: U ist Normalteiler in A_4 (Tipp: Aufgabe 1c).

Lösungsvorschlag. Sei $\pi \in A_4$. Wir betrachten stellvertretend $(1\ 2)(3\ 4) \in U$ und wollen zeigen, dass

$$\pi(1\ 2)(3\ 4)\pi^{-1} \in U.$$

Nach Aufgabe 1c ist das Ergebnis dieser Rechnung $(\pi(1)\ \pi(2))(\pi(3)\ \pi(4))$. Da π bijektiv ist, müssen die beiden Transpositionen disjunkt sein (es kann also nicht $\pi(2) = \pi(3)$) gelten.

Aber alle möglichen Verknüpfungen von zwei disjunkten Transpositionen in S_4 sind bereits in U enthalten. (Disjunkte Transpositionen kommutieren miteinander und natürlich gilt $(1\ 2) = (2\ 1)$).

Damit liegt das Ergebnis wieder in U. Analog überprüft man diese Eigenschaft auch für die anderen Elemente in U und erhält so die Normalteilereigenschaft von U in A_4. □

($\star$) (d) Sei $\pi \in S_4$ mit $o(\pi) = 3$. Zeigen Sie, dass $\pi \in A_4$.

Lösungsvorschlag. Es gilt $\pi^3 = \mathrm{id}$. Entsprechend folgt $\mathrm{sgn}(\pi)^3 = \mathrm{sgn}(\pi^3) = \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1$. Damit folgt $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$ und somit $\pi \in A_4$. □

Aufgabe 3: Wir betrachten die vierelementige Menge $K = \{0, 1, a, b\}$ und definieren $a^2 = b$ sowie $b^2 = a$.

Wir möchten eine (kommutative) Addition und Multiplikation auf K definieren, sodass obige Regeln beachtet bleiben und K zum Körper wird (hierbei soll 0 bzw. 1 das additiv bzw. multiplikativ Neutrale sein).

(a) Zeigen Sie, dass $ab = 1$ gelten muss.

Lösungsvorschlag. Es gilt $a \cdot (ab) = a^2 b = b^2 = a$. Also ist ab multiplikativ neutral zu a und somit folgt $ab = 1$. □

(b) Zeigen Sie, dass $1 + a \neq 0$ und $1 + b \neq 0$ und schließen Sie, dass $\operatorname{char} K = 2$.

Lösungsvorschlag. $(1+a)b = b+ab = b+1$ und $(1+b)a = 1+a$. Wenn ein Ergebnis $= 0$ wäre, dann also auch das andere. Aber es kann nicht $1 + a = 1 + b = 0$ gelten, weil das additiv inverse von 1 eindeutig sein muss. Da 0 nicht das additiv inverse ist, bleibt als lezte Möglichkeit, dass 1 selbst invers ist, also $1 + 1 = 0$ und somit $\operatorname{char} K = 2$. □

($\star$) (c) Bestimmen Sie $a + b$.

Lösungsvorschlag. Da wir in $\operatorname{char} K = 2$ arbeiten, gilt $a + a = b + b = 1 + 1 = 0$. Es kann also nicht sein, dass $a + b = 0 = a + a$ da dann $b = a$ folgen würde.

Außerdem kann nicht $a + b = a$ oder $a + b = b$ gelten, da dann $b = 0$ bzw. $a = 0$ folgen würden. Es bleibt nur $a + b = 1$. □

Aufgabe 4: Sei p eine Primzahl. Wir betrachten den Körper $K_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und das Polynom $x^3 - 1$ über K_p.

(a) Finden Sie ein p, sodass $x^3 - 1$ genau eine Nullstelle über K_p hat.

Lösungsvorschlag. In $K_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat das Polynom nur eine Lösung nämlich 1. Denn $0^3 - 1 = 1$ in K_2. □

($\star$) (b) Finden Sie ein p, sodass $x^3 - 1$ mehr als eine Nullstelle über K_p hat.

Lösungsvorschlag. In $K_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ hat das Polynom mehrere Lösungen. Neben 1 gilt auch für 2 und 4, dass $2^3 = 8 = 1 \mod 7$ und $4^3 = 64 = 1 \mod 7$. □