Übungen zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Tutoriumsblatt 6b

Aufgabe 1: Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$ Vektorraum. Zeigen Sie, dass für jedes Element $x \in \mathbb{R}^3 \otimes V$ eindeutige $v_1, v_2, v_3 \in V$ existieren, sodass

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes v_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes v_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes v_3.$$

Lösungsvorschlag. Sei b_i eine Basis von V. Nach Vorlesung bilden $e_i \otimes v_b$ eine Basis von $\mathbb{R}^3 \otimes V$ wobei e_i die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Daraus folgt aufgrund der Linearität in beiden Argumenten, dass die gewünschte Darstellung existiert.

Auch die Eindeutigkeit folgt aus dieser Tatsache. Angenommen es gäbe für ein x auch noch $w_1, w_2, w_3 \in V$ als Darstellung. Dann würde

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (v_1 - w_1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (v_2 - w_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes (v_3 - w_3).$$

Nun kann man $v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3$ in der Basis b_i schreiben. Nutzt man wieder die Linearität und zieht alles auseinander erhält man eine Darstellung der Null in der Basis $e_i \otimes b_j$. Hier müssen alle Vorfaktoren gleich Null sein was zeigt, dass $v_1 - w_1 = v_2 - w_2 = v_3 - w_3 = 0$. $\square$

Aufgabe 2: Seien V, W zwei endlich dimensionale reelle Vektorräume mit Basis $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$ und Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$. Wir definieren

$$\langle v_i \otimes w_j, v_k \otimes w_l \rangle_\otimes = \langle v_i, v_k \rangle_V \cdot \langle w_j, w_l \rangle_W$$

auf der Basis und setzen die Abbildung dann bilinear fort.

(a) Zeigen Sie, dass falls $v_1, \ldots v_n$ und $w_1 \ldots w_m$ jeweils Orthonormalbasen von V bzw. W sind, $v_i \otimes w_j$ eine ONB von $V \otimes W$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_\otimes$ ist.

Beweis. Das es sich um eine Basis handelt ist aus der Vorlesung bekannt. Es gilt

$$\langle v_i \otimes w_j, v_i \otimes w_j \rangle_\otimes = \langle v_i, v_i \rangle_V \cdot \langle w_j, w_j \rangle_W = 1 \cdot 1 = 1.$$

Verschiedene Basisvektoren unterscheiden sich in mindestens einem Index. Es gilt

$$\langle v_i \otimes w_j, v_k \otimes w_l \rangle_\otimes = \langle v_i, v_k \rangle_V \cdot \langle w_j, w_l \rangle_W = 0,$$

da der erste Faktor $= 0$ ist falls $i \neq k$ und der zweite Faktor $= 0$ ist falls $j \neq l$. □

($\star$) (b) Zeigen Sie, dass es sich bei $\langle \cdot, \cdot \rangle_\otimes$ um ein Skalarprodukt auf $V \otimes W$ handelt. (Sie dürfen annehmen, dass es sich um ONBs handelt).

Lösungsvorschlag. Die Abbildung ist nach Definition Bilinear. Es gilt also Symmetrie und positive Definitheit zu überprüfen. Auf der Basis folgen beide Aussagen direkt aus den jeweiligen Eigenschaften der Skalarprodukte auf V bzw. W. Um zu überprüfen, dass sich diese Eigenschaften auf beliebe Elemente $x, y \in V \otimes W$ fortsetzen berechnen wir

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle_\otimes &= \langle \sum_{i,j} \lambda_{ij} v_i \otimes w_j, \sum_{k,l} \mu_{kl} v_k \otimes w_l \rangle_\otimes \\
&= \sum_{i,j,k,l} \lambda_{ij} \mu_{kl} \langle v_i \otimes w_j, v_k \otimes w_l \rangle_\otimes \\
&= \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \mu_{i,j} \langle v_i \otimes w_j, v_i \otimes w_j \rangle_\otimes \\
&= \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \mu_{i,j}
\end{aligned}$$

Im letzten und vorletzten Schritt haben wir benutzt, dass es sich um eine ONB handelt und somit alle gemischten Terme wegfallen und im letzten Schritt dass die Basis normiert ist.

Hier sieht man sofort die Symmetrie und falls $x = y$, gilt $\lambda_{i,j} = \mu_{i,j}$ und man kann die Positiv Definitheit ablesen. □

Aufgabe 3: Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum. Zeigen Sie, dass $V_\mathbb{C} \simeq V \oplus Vi = \{a + bi \mid a, b \in V\}$. (Als $\mathbb{C}$ Vektorräume)

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $F : V \oplus Vi \to V_\mathbb{C}$ mit $F(a + bi) = 1 \otimes a + i \otimes b$ für $a, b \in V$. Die Abbildung ist offensichtlich additiv und respektiert Multiplikation, da für $x, y \in \mathbb{R}$

$$F((x + yi) \cdot (a + bi)) = 1 \otimes (ax - by) + i \otimes (ay + bx) = (x + yi)(1 \otimes a + i \otimes b).$$

Um zu zeigen, dass die Abbildung bijektiv ist betrachten wir beide Räume als reelle Vektorräume. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so ist $\{v_j + 0i, 0 + v_j \cdot j \mid i = 1, \ldots n\}$ eine Basis von $V \oplus Vi$ und $\{1 \otimes v_j, i \otimes v_j \mid j = 1, \ldots n\}$ eine Basis von $V_\mathbb{C}$.

Da F die reelle Basis von $V \oplus Vi$ auf eine reelle Basis von $V_{\mathbb{C}}$ abbildet, ist F bijektiv. Alternativ kann man genau so gut die komplexen Basen $v_j + 0$ und $1 \otimes v_j$ betrachten. $\square$

Aufgabe 4: Seien V, W zwei reelle Vektorräume und $f : V \to W$ ein (reell) lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ mit $f_{\mathbb{C}}(a + bi) = f(a) + if(b)$ eine komplex lineare Abbildung ist.

Lösungsvorschlag. Sei $\lambda = x + yi \in \mathbb{C}$ und $a + bi, \tilde{a} + \tilde{b}i \in V_{\mathbb{C}}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(a + bi + \tilde{a} + \tilde{b}i) &= f_{\mathbb{C}}(a + \tilde{+}(b + \tilde{b})i) \\ &= f(a + \tilde{a}) + if(b + \tilde{b}) \\ &= f(a) + f(\tilde{a}) + if(b) + if(\tilde{b}) = f_{\mathbb{C}}(a + bi) + f_{\mathbb{C}}(\tilde{a} + \tilde{b}i). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(\lambda(a + bi)) &= f_{\mathbb{C}}(ax - by + (ay + bx)i) \\ &= f(ax - by) + if(ay + bx) \\ &= xf(a) - yf(b) + iyf(a) + ixf(b) \\ &= (f(a) + f(b)i)(x + yi) = \lambda f_{\mathbb{C}}(a + bi). \end{aligned}$$

$\square$

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$

Lösungsvorschlag. Man überprüft leicht, dass es sich hierbei um die Identitätsabbildung auf $V_{\mathbb{C}}$ handelt. $\square$

($\star$) (c) Zeigen Sie, dass für lineares $g : W \to U$ gilt, dass $(g \circ f)_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$.

Lösungsvorschlag. Sei $a + bi \in V_{\mathbb{C}}$. Dann gilt

$$(g \circ f)_{\mathbb{C}}(a + bi) = g \circ f(a) + ig \circ f(b) = g(f(a)) + ig(f(b)).$$

und

$$g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}(a + bi) = g_{\mathbb{C}}(f(a) + if(b)) = g(f(a)) + ig(f(b)).$$

Damit ist die Gleichheit bewiesen. $\square$