$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\varphi \text{ multilin}"] \arrow[rr, bend right, "\psi \text{ multilinear}"'] & V \otimes W \arrow[r, "f_\psi"] & Z
\end{tikzcd}$$

$$\psi = f_\psi \circ \varphi$$

<u>Notation</u>: Für zwei Vektoren $v \in V$, $w \in W$ schreiben wir
$$v \otimes w := \varphi((v,w)).$$

<u>Definition</u>: Für jedes $t \in V \otimes W$ nennen wir die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$ so dass $t = \sum_{j=1}^{k} v_j \otimes w_j$ mit geeigneten $v_j \in V$, $w_j \in W$ den <u>Rang des Tensors</u> t.

<u>Bemerkung</u>: Für reine Tensoren ist der Rang immer 1, für gemischte Tensoren immer ≥ 2.

<u>Hilfssatz</u>: Seien $A_1, A_2, \dots, A_k$ Matrizen in $M(m \times n)$. Dann gilt:
$$\operatorname{rang}\left(\sum_{j=1}^{k} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \operatorname{rang}(A_j)$$

<u>Beweis</u>: Es reicht, zwei Matrizen A, B zu betrachten. Die allgemeine Formel erhält man durch mehrmaliges Anwenden der Formel für $k = 2$.
$$\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B.$$

$\operatorname{rang}(A+B)$ ist die Dimension der linearen Hülle der Spalten von $A+B$.
Diese Spalten sind jeweils Linearkombination der Spalten aus A und der Spalten aus B
$$\Rightarrow \operatorname{Im}(A+B) \subseteq \operatorname{span}\{\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{Spalten von } A}, \underbrace{b_1, \dots, b_n}_{\text{Spalten von } B}\}$$
$$\leq \operatorname{span}(\operatorname{Im} A \cup \operatorname{Im} B)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rang}(A+B) = \dim \operatorname{Im}(A+B) \le \dim\big(\operatorname{span}(\operatorname{Im} A \cup \operatorname{Im} B)\big)$$

$$\le \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Im} B = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$$

(Folgt, da die Basisvektoren von $\operatorname{Im} A$ und $\operatorname{Im} B$ den Raum $\operatorname{span}(\operatorname{Im} A \cup \operatorname{Im} B)$ erzeugen.)

<u>Satz:</u> Seien V, W endlichdimensionale K-Vektorräume (m, n verwenden wir für die Dimension).
Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus

$$\alpha : V \otimes W \longrightarrow M(m \times n) \quad \text{mit}$$

$$\alpha(v \otimes w) \longrightarrow v\, w^t.$$

Dabei gilt, dass der Rang einer Matrix A identisch ist mit dem Rang des zugehörigen Tensors $\alpha^{-1}(A)$.

<u>Beweis:</u>

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi : (v,w) \to \underline{v w^t}"'] & V \otimes W \arrow[r, "\alpha"] & M(m \times n) \end{tikzcd}$$

multilinear.

Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V, $A = (a_1, \dots, a_m)$ Basis von W.

$$\psi(\underbrace{b_j, a_k}) \longrightarrow b_j a_k^{\,t} = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & \vdots & \end{matrix}\right)_{A,B} \\ \uparrow \\ k \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Basis von $V \otimes W$, s.o.

$\cdot\ \alpha$ bildet also eine Basis von $V \otimes W$ auf eine Basis von $M(m \times n)$ ab und umgekehrt $\Rightarrow$ Isomorphismus.

<u>Rang:</u> $\quad v \otimes w \xrightarrow{\alpha} v\, w^t \qquad$ Das Bild dieser Matrix ist $\operatorname{span}\{v\} \Rightarrow$ rang der Matrix ist 1.

Sei t ein Tensor mit Rang k

$$\Rightarrow \quad t = \sum_{j=1}^{k} v_j \otimes w_j \qquad \alpha(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha(v_j \otimes w_j)$$

Der Rang der Matrix $\alpha(t)$ ist wegen des Hilfssatzes klein gleich der Summe der Ränge der $\alpha(v_j \otimes w_j)$.
Diese sind alle 1 $\Rightarrow \operatorname{rang}(\alpha(t)) \le k$

Sei nun A eine Matrix mit Rang k.

Wir können durch Basiswechsel A transformieren auf

$$A = S\,B\,T \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$t := \alpha^{-1}(A) = \alpha^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k} e_j\right) =$$

(e_j ist Matrix mit 1 an Eintrag j,j, sonst 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$)

$$= \sum_{j=1}^{k} b_j \otimes a_j$$

$\Rightarrow$ t kann als Summe von k reinen Tensoren geschrieben werden $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{rang} t \leq k}$

$\operatorname{rang} \alpha^{-1}(A) \leq \operatorname{rang} A$

oben: $\operatorname{rang} \alpha(t) \leq \operatorname{rang} t$

$\Rightarrow \operatorname{rang} \alpha(t) = \operatorname{rang} t$

Korollar: Wenn man eine Matrix A vom Rang k hat, lässt sie sich als Linearkombination der Form

$$A = \sum_{j=1}^{k} v_j\, w_j^t \quad \text{für geeignete Vektoren } v_j, w_j$$

schreiben. Weniger als k Summanden funktionieren nicht.