

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 3 (Abgabe spätestens 04.11.2022, 8:00)

Aufgabe 13 (15 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

$$\text{a) } \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} 5^{\nu} \qquad \text{b) } \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} 5^k \qquad \text{c) } \sum_{\nu=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{\ell}{\nu} 5^{\nu}$$

Aufgabe 14 (10 Zusatzpunkte)

a) Bestimmen Sie α so, dass

$$\nu \binom{n}{\nu} = \alpha \binom{n-1}{\nu-1} \quad \forall n, \nu \in \mathbb{N}.$$

Gilt die Beziehung auch für $n \in \mathbb{R}$?

b) Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten) für $p \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{\nu=0}^n \nu \binom{n}{\nu} p^{\nu} (1-p)^{n-\nu}.$$

Aufgabe 15 (6+11+3 = 20 Punkte)

Seien f, g und h Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f(x) = x^2 - 5, \quad g(x) = \sqrt{x+8} \quad \text{und} \quad h(x) = x^3 + 1.$$

a) Bestimmen Sie für f, g und h jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie das Bild (als Teilmengen von \mathbb{R}).

b) Existieren die folgenden Verkettungen? (Die Definitionsbereiche aus Teil (a) gelten weiterhin.) Geben Sie ggf. den Definitionsbereich und das Bild der jeweiligen Verknüpfung an.

$$\begin{array}{lll} \text{(i) } f \circ g & \text{(ii) } g \circ f & \text{(iii) } f \circ h \\ \text{(iv) } h \circ f & \text{(v) } g \circ h & \text{(vi) } h \circ g \end{array}$$

c) Bestimmen Sie $(h \circ f)(x) - (f \circ h)(x)$.

Aufgabe 16 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+2n^2} \left(\frac{2n^5 - 3n^4 + 1}{n^2} - 2n^3 \right) \right) \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - 2n} \right)$$

