Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 22/23

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 5 (Abgabe am 18.11.2022)

Aufgabe 23 (10 Punkte)

Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\mu}\frac{2^\nu}{n-\nu+1}$ b) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=\nu}^{n}\frac{\nu}{\mu(\mu+1)}$

Hinweis: Kennzeichnen Sie in der $\mu\nu$-Ebene jeweils alle Paare (μ,ν), über die in $\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=\nu}^{n}\dots$ bzw. in $\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\mu}\dots$ summiert wird. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 24 (9 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{5x+15}{27+x^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^{22}-512x^{13}}{32-x^5}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2k+1}+1}$ für $n,k\in\mathbb{N}$

Aufgabe 25 (keine Abgabe)

Beweisen Sie die Kettenregel, d.h. zeigen Sie, dass für die Verkettung $f = g\circ h$ gilt, dass $f'(x_0) = g'(h(x))\cdot h'(x)$ – unter der Voraussetzung, dass g und h auf geeigneten Bereichen (wo genau?) differenzierbar sind.

Benutzen Sie dabei unsere Definition von Differenzierbarkeit als lineare Approximierbarkeit. Klein-o hilft! Hier gibt's die Lösung: `https://youtu.be/1AQ7Gm4DS2c` – aber probieren Sie's zunächst selbst!

Aufgabe 26 (9 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\pi}{n+22}\right)^n$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{n+22}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{22-n}\right)^{2n}$

Aufgabe 27 (1+6+3 = 10 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen *Sinus Hyperbolicus*, *Kosinus Hyperbolicus* und *Tangens Hyperbolicus* sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\,,\quad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\quad\text{und}\quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,.$$

a) Für welche $x\in\mathbb{R}$ können wir die Funktionen definieren?
b) Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x\to\infty$ und $x\to-\infty$.
c) Zeigen Sie: $\cosh^2(x)-\sinh^2(x) = 1$.

Aufgabe 28 (3+4+4 = 11 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun die Graphen von $\sinh, \cosh$ und $\tanh$. Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie größtmögliche Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Aufgabe 29 (10 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 14.01.2023 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Trigonometric ratios in right triangles*,
- *Unit circle (with radians)*,
- *Use the Pythagorean identity*,
- *Period of sinusoidal functions from equation* und
- *Graph sinusoidal functions.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).