Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 22/23
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 9 (Abgabe am 16.12.2022)

Aufgabe 48 (5 Zusatzpunkte)
Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} \beta^2 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 49 (keine Abgabe)
Seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{10}$ mit $\dim U = 5$ und $\dim V = 6$ und Basen $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_5$ von U und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_6$ von V. Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_5, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_6\right)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an!

Aufgabe 50 (12 Zusatzpunkte)
Geben Sie für alle Vektorräume aus Aufgabe 43 die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 51 (14 Punkte)
Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2a_1b_1 + a_2b_2 + 9a_3b_3$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 - a_2b_2$

d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

e) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3 - a_2b_3 - a_3b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.

Aufgabe 52 (12 Punkte)
Seien

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und die zugehörige Norm.
Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\| = |\vec{a}_j|$, $j = 1, 2, 3$
und alle Skalarprodukte $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle = \vec{a}_j \cdot \vec{a}_k$, $j \neq k$.

b) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 51e und die zugehörige Norm.
Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\|$, $j = 1, 2, 3$
und alle Skalarprodukte $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle$, $j \neq k$.