Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 22/23

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 10 (Abgabe am 23.12.2022)

Aufgabe 53 (6 Punkte)

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ wie in Aufgabe 52 und $U = \operatorname{span}(\vec{a}_2, \vec{a}_3) \subset \mathbb{R}^3$.

a) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und die zugehörige Norm.
Bestimmen Sie mithilfe von Gram-Schmidt eine ONB von U.

b) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 52e und die zugehörige Norm.
Bestimmen Sie mithilfe von Gram-Schmidt eine ONB von U.

Aufgabe 54 (keine Abgabe)

Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für beliebige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 55 (3+2+2 = 7 Punkte)

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir betrachten das LGS

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b} \qquad \text{für } x_j \in \mathbb{R}\,,\ j = 1, 2, 3\,.$$

a) Bilden Sie das Kreuzprodukt mit $\vec{a}_2$ von rechts und anschießend das Skalarprodukt des Ergebnisses mit $\vec{a}_3$. Lösen Sie nun – wenn möglich – nach x_1 auf.

b) Beschaffen Sie sich analoge Lösungsformeln für x_2 und x_3.

c) Welche Bedingung müssen die $\vec{a}_j$ erfüllen, damit wir mithilfe der Formeln aus (a) und (b) wirklich die Lösung des LGS erhalten?

Aufgabe 56 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte (x, y) aus $\mathbb{R}^2$:

a) $(1, \sqrt{3})$ b) $(-2, 2)$ c) $(\sqrt{3}, -1)$ d) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Aufgabe 57 (4+4+4 = 12 Zusatzpunkte)

Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$,

$$2x_1 + 1 + 9x_3 = x_2\,.$$

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform von E_1 an. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

Die Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben als

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Geben Sie die Hessesche Normalform von E_2 an.

c) Bestimmen Sie die Schnittmenge von E_2 und E_1.