

# Mathematik 1 für Naturwissenschaftler\*innen

Übungsblatt 11 (Abgabe am 13.01.2023)

---

## Aufgabe 58

(8 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie eine ON-Basis für

$$U = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf  $\mathbb{R}^4$ .

## Aufgabe 59

(8 Punkte)

Geben Sie die folgenden Punkte  $(x, y, z)$  aus  $\mathbb{R}^3$  in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$  an:

e)  $(5, 0, 0)$       f)  $(0, 0, -\pi)$       g)  $(1, 0, -1)$       h)  $(1, -1, -\sqrt{2})$

## Aufgabe 60

(8 Punkte)

Sei  $t \in [0, 2\pi]$ . Berechnen Sie für die folgenden Kurven die Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}(t)$  und zeichnen Sie die Kurven.

a)  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (\pi + t) \cos t \\ (\pi + t) \sin t \end{pmatrix}$       b)  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ t \end{pmatrix}$

## Aufgabe 61

(10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (a) eine ONB des  $\mathbb{R}^3$  und (b) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem (c) die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie  $\dot{\vec{x}}$  für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)) \cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t)) \sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  und  $\vec{e}_\phi$  aus.

**Aufgabe 62**

(10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- a)  $AA^T$ ,      b)  $A^T A$ ,      c)  $AA^T B$ ,      d)  $A^T AB$ ,  
e)  $B^T AA^T$ ,      f)  $A^2$ ,      g)  $A^T AA^T A$ .

HINWEIS: Assoziativität, d.h.  $(AB)C = A(BC)$ , ist hilfreich.**Aufgabe 63**

(8 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen (wobei  $x, y \in \mathbb{R}$ ).

- a)  $\frac{100 + 20i}{3 - 2i}$       b)  $(\overline{x + iy})^3$       c)  $\sqrt{3} \exp(\frac{1}{2} \log 6 - i\frac{\pi}{4})$       d)  $\cos(x + iy)$

**Aufgabe 64**

(8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 05.02.2023 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die Skills

- *Matrix elements*,
- *Matrix equations: scalar multiplication*,
- *Multiply matrices* und
- *Divide complex numbers*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

**Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!**