Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 22/23

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Klausur am 10.02.2023

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 102 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \log\left(\frac{\nu+2}{\nu}\right) = \log\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right) \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{22}-1}{x^{23}+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin x - \sin(3x)}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4-7x^2} - \sqrt{3+x^4}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2-3)\sin^2(x) + (x^2+1)\cos^2(x)}{2-5x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \Big(\log\left(x^2-3x\right) - \log\left(x+3x^2\right)\Big)$

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{22}{23}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{22} \binom{23}{n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{22}\sum_{\mu=1}^{22} \frac{\nu}{22}$ d) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{23}\sum_{\nu=\mu}^{23} \frac{23}{\nu}$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Was müssen Sie in

$$\sum_{\nu=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{\nu} - \sum_{\nu=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{\nu} (-1)^\nu = 2\sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{\boxed{}}$$

für $\boxed{}$ eintragen, damit die Gleichung stimmt? Berechnen Sie nun $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{2\nu+1}$ (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten).

Aufgabe 5 (3+3+4 = 10 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

a) $\dfrac{20-23\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ b) $\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}+\log\pi}$ c) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2023}$

Aufgabe 6 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{3x^3+24}$ und b) $\dfrac{\cos(x^2)}{1+x^4}$ um Null, sowie die Taylorreihe von

c) $\sin x$ um $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 7 (2+1+3+4 = 10 Punkte)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,.$$

a) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.
c) Berechnen Sie $f'(x)$.
d) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$, d.h. geben Sie $f^{-1}(x)$ an.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Sei $f(x) = |\cos x|\ \forall x \in \mathbb{R}$ und sei

$$F(x) := \int_x^{2023} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Bestimmen Sie $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 9 (3+3+2+3 = 11 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie $A^T A$.
b) Bestimmen Sie A^{-1}.
c) Berechnen Sie $\det B$.
d) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, die $A^{-1}\vec{x} = \vec{c}$ erfüllen.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie e^{Ax}, wobei die Matrixeponentialfunktion durch die Potenzreihe definiert ist, d.h. $\mathrm{e}^{Ax} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$.