Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler
Wintersemester 22/23

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 18.04.2023

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 102 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (1+5 = 6 Punkte)

Sei $a_1 = a_2 = 1$, und für $n \geq 3$ sei $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

a) Berechnen Sie a_3, a_4 und a_5.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_{n+2} - 1 \qquad \forall\, n \geq 1\,.$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^{23}+1}{x^{22}-1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\big(\cos(x)-\cos(3x)\big)^2}{x^4}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(\sqrt{x^4+7x^2} - x^2\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(1-x^2)\sin^2(x) - (2+x^2)\cos^2(x)}{2+5x^2}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(\log\big(x^2-23\big) - \log\big(x+5x^2\big)\Big)$

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{22}{23}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{23} \binom{23}{n-1}$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{22}\sum_{\mu=\nu}^{22} \frac{1}{23-\nu}$ d) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{23}\sum_{\mu=\nu}^{23} \frac{\nu}{\mu(\mu+1)}$

Aufgabe 4 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\displaystyle\frac{1}{2x^4+32}$ und b) $\displaystyle\frac{\sin(x)}{1-4x^2}$ um Null, sowie die Taylorreihe von

c) $\cos x$ um $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 5 (3+3+4 = 10 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

a) $\dfrac{20+23\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ b) $\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2\right)$ c) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2023}$

Aufgabe 6 (3+3+1+3 = 10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\,.$$

a) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
b) Berechnen Sie $f'(x)$.
c) Geben Sie $f(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, d.h. das Bild von f, an.
d) Die Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to B$, mit geeignetem B (vgl. Teil c), ist bijektiv. Bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion, d.h. geben Sie $f^{-1}(x)$ an.

Aufgabe 7 (6+6=12 Punkte)

Sei $f(x) = |\sin x|\ \forall x \in \mathbb{R}$ und sei

$$\Phi(x) = \int_x^{2023} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Berechnen Sie $\Phi(2\pi) - \Phi(3\pi)$.
b) Bestimmen Sie $\Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 8 (3+3+2+3 = 11 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie $A^T A$.
b) Bestimmen Sie A^{-1}.
c) Berechnen Sie $\det B$.
d) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, die $A\vec{x} = \vec{c}$ erfüllen.

Aufgabe 9 (2+5+3 = 10 Punkte)

Sei $C([0,1])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen vom Intervall $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für} \quad f, g \in C([0,1])$$

und zugehöriger Norm $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Weiter sei $f_j(x) = x^j$, $j \in \mathbb{N}_0$, sowie $U = \operatorname{span}(f_0, f_1, f_2)$ und $L : U \to U$ definiert durch $L(g) = \langle f_1, g\rangle f_1$.

a) Berechnen Sie $\langle f_j, f_k\rangle$ für $j, k \in \mathbb{N}_0$.
b) Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums $K = \{g \in U | L(g) = 0\}$ und geben Sie eine Basis von K an.
c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(f_0, f_1)$.