Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
20.10.2023
Blatt 01

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 01. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$, $r > 0$ und $U := B(x; r)$ die Kugel vom Radius r um x. Zeigen Sie, dass $U \subseteq X$ offen ist.

Aufgabe 02. Seien X, Y und Z topologische Räume sowie $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Sei weiter $x_0 \in X$ und $y_0 = f(x_0)$. Zeigen Sie:

(a) Ist f stetig in x_0 und g stetig in y_0, so ist die Komposition $g \circ f\colon X \to Z$, $g \circ f(x) = g(f(x))$, stetig in x_0.

(b) Sind f und g stetig, so auch $g \circ f$.

Aufgabe 03.

(a) Sei X eine Menge mit zwei Elementen. Bestimmen Sie alle Topologien auf X. Wieviele davon sind paarweise nicht zueinander homöomorph?

(b) Sei X eine Menge mit drei Elementen. Bestimmen Sie alle Topologien auf X, die paarweise nicht zueinander homöomorph sind.

Aufgabe 04. Seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sei weiter $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine Subbasis der Topologie auf Y. Zeigen Sie: f ist bereits dann schon stetig, wenn $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist, für alle $V \in \mathcal{A}$. (Hinweis: Die Menge $\{V \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(V) \subseteq X \text{ ist offen}\}$ ist eine Topologie auf Y.)

Abgabe: Freitag, den 27.10.2023 bis 9.15 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor oder in der Vorlesung