Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
27.10.2023
Blatt 02

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 05. Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, versehen mit der Relativtopologie, und $i: Y \to X$ die Inklusion. Zeigen Sie:

(a) Sei Z ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $f: Z \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $i \circ f$ stetig ist. (*Universelle Eigenschaft der Relativtopologie*)

(b) Erfüllt X das 1. Abzählbarkeitsaxiom, so auch Y. Hat X abzählbare Topologie, so auch Y. Ist X Hausdorffsch, so auch Y.

Aufgabe 06.

(a) Seien X_1 und X_2 topologische Räume, $X = X_1 \times X_2$ das cartesische Produkt und $\pi_i: X \to X_i$ die kanonischen Projektionen ($i = 1, 2$). Zeigen Sie *die universelle Eigenschaft der Produkttopologie* auf X: Ist Y ein weiterer topologischer Raum, so ist eine Abbildung $f: Y \to X$ genau dann stetig, wenn die Kompositionen $\pi_i \circ f: Y \to X_i$ ($i = 1, 2$) es sind.

(b) Sei $\mathbb{R}$ mit der Standard-Topologie versehen und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt. (Hinweis: Eine (offene) Kugel ist Vereinigung von (offenen) Quadern und ein (offener) Quader ist Vereinigung von (offenen) Kugeln.)

Aufgabe 07.

(a) Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi: X \to Q := X/\!\sim$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie *die universelle Eigenschaft der Quotiententopologie* auf Q: Für einen topologischen Raum Y ist eine Abbildung $f: Q \to Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi: X \to Y$ es ist.

(b) Sei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall (mit seiner von $\mathbb{R}$ induzierten Relativtopologie). Sei weiter $R \subseteq I \times I$ die von $(0, 1)$ (also $0 \sim 1$) erzeugte Äquivalenzrelation auf I. Sei schließlich $f: I \to \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $\bar{f}: I/R \to \mathbb{S}^1$ mit $\bar{f} \circ \pi = f$ gibt, dass $\bar{f}$ stetig und bijektiv und sogar ein Homöomorphismus ist. (Hinweis: Für die Stetigkeit von $\bar{f}^{-1}$ können Sie einen (komplexen) Zweig des Logarithmus verwenden.)

Aufgabe 08. Seien X_1 und X_2 topologische Räume und (X, ι_1, ι_2) ihre mengentheoretische Summe. Zeigen Sie *die universelle Eigenschaft der Summentopologie* auf X: Ist Y ein topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so ist f genau dann stetig, wenn $f \circ \iota_i\colon X_i \to Y$ $(i = 1, 2)$ es sind.

Abgabe: Freitag, den 03.11.2023 bis 9.15 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor oder in der Vorlesung