Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
10.11.2023
Blatt 04

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 13. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann nennt man

$$\operatorname{int}(Y) := \bigcup \{U \subseteq X : U \text{ ist offen}, U \subseteq Y\}$$

den *offenen Kern* (oder *das Innere*) *von* Y. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{int}(Y)$ ist offen und die größte offene Menge, die in Y enthalten ist.

(b) Es ist $x \in X$ genau dann in $\operatorname{int}(Y)$, wenn es eine Umgebung S von x gibt mit $S \subseteq Y$.

Aufgabe 14. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Man nennt dann $x \in X$ einen *Randpunkt von* Y, wenn für jede Umgebung S von x gilt: $S \cap Y \neq \emptyset$ und $S \cap \mathcal{C}Y \neq \emptyset$. ($\mathcal{C}Y$ bezeichnet hier das Komplement von Y in X.) Bezeichnet

$$\partial Y := \{x \in X : x \text{ ist Randpunkt von } Y\}$$

den *Rand von* Y *in* X, so zeigen Sie: $\partial Y = \bar{Y} \setminus \operatorname{int}(Y)$.

Aufgabe 15. Zeigen Sie, dass folgende Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^2$ keine Mannigfaltigkeit (irgendeiner Dimension) aber lokal kompakt ist:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}.$$

Aufgabe 16. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi \colon \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion aus dem Nordpol $N \in \mathbb{S}^n$ heraus.

(a) Begründen Sie, warum π bijektiv ist und geben Sie eine explizite Formel für π und π^{-1} an.

(b) Zeigen Sie nun, dass π eigentlich ist und damit, dass die Fortsetzung $\tilde{\pi} \colon \mathbb{S}^n \to \tilde{\mathbb{R}^n}$ von π, gegeben durch $\tilde{\pi}(N) = \omega$, wo $\tilde{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\omega\}$ die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ bezeichne, stetig und sogar ein Homöomorphismus ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 17.10.2023 um 9.15 Uhr