Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
17.11.2023
Blatt 05

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 17. Sei $H\colon I \times I \to \mathbb{C}$ ($I = [0,1]$) eine stetige Abbildung und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Unterteilung $(t_0, \cdots, t_k)$, $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$, von I gibt ($k \in \mathbb{N}$), so dass für alle $s \in I$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$ und $j = 0, \ldots, k-1$ gilt:

$$|H(t,s) - H(t_j, s)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 18. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ stetig. Für jedes $x \in \mathbb{B}^n$ mit $f(x) \neq x$ sei $r(x) \in \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$ der Durchschnittspunkt des Strahls $L = \{f(x) + t(x - f(x)) \in \mathbb{R}^n : t > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$: $L \cap \mathbb{S}^{n-1} = \{r(x)\}$. Geben Sie eine Formel für $r(x)$ an und zeigen Sie damit, dass mit $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{B}^n : f(x) = x\}$ die Abbildung $r\colon \mathbb{B}^n \setminus \mathrm{Fix}(f) \to \mathbb{S}^{n-1}$ stetig ist.

Aufgabe 19.

(a) Zeigen Sie, dass der Brouwersche Fixpunktsatz (vgl. Vorlesung §4) auch in Dimension $n = 1$ gilt: Ist $f\colon \mathbb{B}^1 \to \mathbb{B}^1$ stetig, so hat f einen Fixpunkt. (Hinweis: Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.)

(b) Formulieren Sie den Retraktionssatz und den Brouwerschen Fixpunktsatz für alle Dimensionen $n \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie, dass die Aussagen äquivalent zueinander sind.

Aufgabe 20. Wir betrachten im Folgenden die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ als topologischen Raum und (mit der von der komplexen Multiplikation gegebenen Struktur) als Gruppe (so genannte *topologische Gruppe*, da die Gruppenoperationen auch stetig sind). Die Multiplikation $f \cdot g$ von stetigen Abbildungen $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ ist dann als punktweise zu verstehen.

(a) Seien $f, g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie:

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

(b) Seien $f, f', g, g' \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ mit $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$. Zeigen Sie, dass dann auch $f \cdot g$ und $f' \cdot g'$ homotop sind.

(c) Zeigen Sie für alle $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$:

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g).$$

Abgabe: Bis Freitag, den 24.11.2023 um 9.15 Uhr