Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
01.12.2023
Blatt 07

# Übungen zu „Algebraische Topologie“

**Aufgabe 25.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und seien $X_1$ und $X_2$ zwei Objekte in $\mathcal{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass ein Produkt $(X, p_1, p_2)$ von $X_1$ und $X_2$ in folgendem Sinn bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist: Ist $(Y, q_1, q_2)$ ein weiteres Produkt von $X_1$ und $X_2$, so gibt es einen (sogar eindeutig bestimmten) Isomorphismus $\Phi \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ mit $q_i\Phi = p_i$ $(i = 1, 2)$.

(b) Formulieren und zeigen Sie dann ganz ähnlich, dass eine Summe von $X_1$ und $X_2$ eindeutig bestimmt ist.

**Aufgabe 26.**

(a) Sei $A$ eine Menge, $F(A)$ die von ihr frei erzeugte Gruppe und $\iota\colon A \to F(A)$ die Abbildung, die $a \in A$ das einbuchstabige Wort $a \in F(A)$ zuordnet. Zeigen Sie die *universelle Eigenschaft* von $(F(A), \iota)$: Ist $G$ eine weitere Gruppe und $f\colon A \to G$ eine Abbildung, so existiert genau ein Homomorphismus $\bar{f}\colon F(A) \to G$ mit $\bar{f} \circ \iota = f$.

(b) Seien $A$ und $B$ Mengen sowie $\iota_A\colon A \to F(A)$ und $\iota_B\colon B \to F(B)$ die natürlichen Injektionen aus Teil (a). Sei nun weiter $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f_*\colon F(A) \to F(B)$ gibt mit $f_* \circ \iota_A = \iota_B \circ f$. Zeigen Sie dann, dass dies $F\colon \mathbf{Ens} \to \mathbf{Grp}$ zu einem Funktor macht.

**Aufgabe 27.** Sei $G$ eine Gruppe. Für zwei Elemente $a, b \in G$ heißt $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ der *Kommutator von $a$ und $b$*. Die von allen Kommutatoren *erzeugte Untergruppe* (d.h. die kleinste Untergruppe, die alle Kommutatoren enthält) heißt die *Kommutator-Untergruppe $G'$ von $G$*.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Element in $G'$ ein (endliches) Produkt von Kommutatoren ist.

(b) Zeigen Sie, dass $G'$ ein Normalteiler von $G$ ist. Wir nennen $G^{\mathrm{ab}} := G/G'$, zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$, die *Abelianisierung von $G$*.

(c) Zeigen Sie, dass $G^{\mathrm{ab}}$ abelsch ist und $(G^{\mathrm{ab}}, \pi)$ mit $\pi\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ folgende *universelle Eigenschaft* erfüllt: Ist $H$ eine (weitere) abelsche Gruppe und $\varphi\colon G \to H$ ein Homomorphismus, so existiert genau ein Homomorphismus (zwischen abelschen Gruppen) $\bar{\varphi}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

**B.w.**

**Aufgabe 28.** Seien $G_1$ und $G_2$ Gruppen und $\pi_j\colon G_j \to G_j^{\mathrm{ab}}$ ihre Abelianisierungen ($j = 1, 2$).

(a) Sei nun $\varphi\colon G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass es genau einen Homomorphismus $\varphi^{\mathrm{ab}}\colon G_1^{\mathrm{ab}} \to G_2^{\mathrm{ab}}$ gibt mit $\varphi^{\mathrm{ab}} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$.

(b) Wir definieren nun eine Zuordnung $T = (\cdot)^{\mathrm{ab}}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ durch $T(G) := G^{\mathrm{ab}}$ auf den Objekten und $T(\varphi) = \varphi^{\mathrm{ab}}$ auf den Morphismen von **Grp**. Zeigen Sie, dass $T$ ein Funktor ist.

**Abgabe:** Bis Freitag, den 08.12.2023 um 9 Uhr