Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
08.12.2023
Blatt 08

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 29. Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor* $T\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ ordnet jedem Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ein Objekt X_2 in $\mathcal{C}_2$ zu und jedem Morphismus $f \in \operatorname{Mor}(X_1, Y_1)$ in $\mathcal{C}_1$ einen Morphismus $T(f) = f^* \in \operatorname{Mor}(T(Y_1), T(X_1))$ in $\mathcal{C}_2$ so zu, dass folgendes gilt:

(i) Für je zwei komponierbare Morphismen $f \in \operatorname{Mor}(X_1, Y_1)$ und $g \in \operatorname{Mor}(Y_1, Z_1)$ in $\mathcal{C}_1$ gilt:

$$T(gf) = T(f)T(g), \text{ kurz: } (gf)^* = f^* g^*,$$

(ii) Für jedes Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ist $T(\mathrm{id}_{X_1}) = \mathrm{id}_{T(X_1)}$.

Nun zeigen Sie:

(a) Sei K ein Körper und $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_K$ die Kategorie der K-Vektorräume. Für jedes Objekt V in $\mathcal{C}$ sei $T(V) = V^*$ der *Dualraum von* V und für jeden Morphismus $f\colon V \to W$ in $\mathcal{C}$ sei $T(f) = f^*\colon W^* \to V^*$ die *zu* f *duale Abbildung*. Zeigen Sie, dass T ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$ auf sich selbst ist.

(b) Sei wieder K ein Körper und W ein fester K-Vektorraum. Für ein Objekt V in $\mathcal{C} := \mathbf{Vect}_K$ sei $T(V) := \operatorname{Hom}(V, W)$ der Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W, und für einen Morphismus $f\colon V_1 \to V_2$ in $\mathcal{C}$ sei

$$T(f) = \operatorname{Hom}(f; W) = f^*\colon \operatorname{Hom}(V_2, W) \to \operatorname{Hom}(V_1, W)$$

gegeben durch $f^*(h) = h \circ f$. Zeigen Sie, dass $T =: \operatorname{Hom}(-; W)$ ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$ auf sich selbst ist. (Beachte, dass dieses Beispiel für $W = K$ in das Beispiel (a) übergeht.)

(c) Für jede abelsche Gruppe G sei $T(G) = \operatorname{Hom}(G, \mathbb{Q})$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Gruppenhomomorphismen von G nach $\mathbb{Q}$, und für einen Morphismus $f\colon G_1 \to G_2$ in $\mathbf{Ab}$ sei $T(f) = \operatorname{Hom}(f, \mathbb{Q})$ wie unter (b). Zeigen Sie, dass $\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Q})$ ein kontravarianter Funktor von $\mathbf{Ab}$ nach $\mathbf{Vect}_{\mathbb{Q}}$ ist.

Aufgabe 30.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Für jeden punktierten topologischen Raum (X, p) sei

$$\pi_k(X, p) := \operatorname{Mor}((\mathbb{S}^k, \mathbf{1}), (X, p))/\simeq$$

die k. Homotopiemenge von (X, p) (für die Fälle $k = 0$ und $k = 1$ vergleiche man die Vorlesung und $\mathbf{1} \in \mathbb{S}^k$ bezeichnet hier den Punkt $(1, 0, \ldots, 0)$), und für einen Morphismus $f\colon (X, p) \to (Y, q)$ in $\mathcal{C} = \mathbf{Top}_0$ sei $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Zeigen Sie, dass f_* wohldefiniert ist und π_k zu einem Funktor von $\mathbf{Top}_0$ nach $\mathbf{Ens}$ macht.

(b) Zeigen Sie nun, dass zwei Morphismen $\alpha, \beta\colon (\mathbb{S}^0, \mathbf{1}) \to (X, p)$ genau dann homotop sind, $[\alpha] = [\beta]$, wenn $\alpha(-1)$ und $\beta(-1)$ in der gleichen Wegkomponente von X liegen. Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung $\pi_0(X, p) \to \pi_0(X)$,

$$[\alpha] \mapsto U(\alpha(-1)),$$

bijektiv ist und für einen Morphismus f in $\mathbf{Top}_0$ sich die Definitionen von f_* aus Teil (a) und der Vorlesung entsprechen. ($U(x) \subseteq X$ bezeichnet hier die Wegkomponente von X, die $x \in X$ enthält.)

Aufgabe 31. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(a) Man nennt ein Objekt X in $\mathcal{C}$ *initial*, wenn es für jedes Objekt Y in $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus von X nach Y gibt. Zeigen Sie, dass ein initiales Objekt einer Kategorie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

(b) Man nennt ein Objekt Y in $\mathcal{C}$ *final*, wenn es für jedes Objekt X in $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus von X nach Y gibt. Zeigen Sie, dass ein finales Objekt einer Kategorie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

(c) Gibt es initiale bzw. finale Objekte in den Kategorien $\mathbf{Ens}$ bzw. $\mathbf{Vect}_K$ (K ein Körper)? Wenn ja, welche?

Aufgabe 32. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und seien X und Y Objekte in $\mathcal{C}$. Definieren Sie neue Kategorien $\mathcal{C}^1_{XY}$ bzw. $\mathcal{C}^2_{XY}$ derart, dass ein Produkt bzw. eine Summe von X und Y darin ein finales bzw. initiales Objekt ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 15.12.2023 um 9 Uhr