Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 33. Sei $k \in \mathbb{N}$. Gegeben sei die Abbildung $f\colon (\mathbb{S}^k, \mathbf{1}) \to (\mathbb{S}^k, \mathbf{1}) \vee (\mathbb{S}^k, \mathbf{1})$, die die obere Hemisphäre $H_+ = \{x \in \mathbb{S}^k : \ x_{k+1} \geq 0\} \subseteq \mathbb{S}^k$ auf die „obere k-dimensionale Schlaufe“ $\iota_1(\mathbb{S}^k) \subseteq \mathbb{S}^k \vee \mathbb{S}^k$, die untere Hemisphäre $H_- \subseteq \mathbb{S}^k$ auf die „untere Schlaufe“ $\iota_2(\mathbb{S}^k) \subseteq \mathbb{S}^k \vee \mathbb{S}^k$ (und damit den Äquator auf den Basispunkt $\iota_1(\mathbf{1}) = \iota_2(\mathbf{1})$ abbildet.

(a) Sei (X, p) ein punktierter Raum. Für zwei Schaufen $\alpha, \beta\colon (\mathbb{S}^k, \mathbf{1}) \to (X, p)$ definieren wir *die Hintereinanderausführung* $\alpha * \beta\colon (\mathbb{S}^k, \mathbf{1}) \to (X, p)$ durch

$$\alpha * \beta := (\alpha \vee \beta) \circ f.$$

Zeigen Sie: Ist $\alpha \simeq \alpha'$ und $\beta \simeq \beta'$ (als Morphismen zwischen punktierten Räumen), so ist auch $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$.

(b) Auf $\pi_k(X, p) = \mathrm{Mor}((\mathbb{S}^k, \mathbf{1}), (X, p))/{\simeq}$ definiert man daher

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta].$$

Zeigen Sie (ähnlich wie im Fall $k = 1$), dass $\pi_k(X, p)$ damit zu einer Gruppe wird, die man *die k. Homotopiegruppe von* (X, p) nennt.

(c) Zeigen Sie schließlich, dass π_k, zusammen mit seiner Definition auf Morphismen (vgl. Aufgabe 30, Blatt 08), für $k \geq 1$ ein Funktor von $\mathbf{Top}_0$ nach $\mathbf{Grp}$ ist.

Aufgabe 34. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Zeigen Sie, dass es dann ein $\lambda > 0$ (eine *Lebesguesche Zahl für* (U_i)) gibt, so dass gilt: Ist $A \subseteq X$ mit $\mathrm{diam}(A) < \lambda$, so existiert ein $i \in I$, so dass $A \subseteq U_i$. (Hinweis: Wählen Sie für jedes $x \in X$ ein $r_x > 0$, so dass $B(x; r_x) \subseteq X$ in einem U_i liegt und überdecken Sie dann X mit endlich vielen Bällen vom halben Radius $B(x, r_x/2)$.)

Aufgabe 35. Sei R die Äquivalenzrelation auf $X = I^2$, die von $(1, s) \sim (0, 1 - s)$ und $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ erzeugt wird ($s, t \in I$).

(a) Begründen Sie, warum der induzierte Quotientenraum $X/\sim$ homöomorph zur reell-projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen:

$$\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 36. Sei $g \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{F}_g$ die geschlossene orientierte Fläche vom Geschlecht g. Berechnen Sie die Abelianisierung $\pi_1(\mathbb{F}_g)^{\mathrm{ab}}$ (vgl. Aufgabe 27, Blatt 07) und zeigen Sie damit: Für $g \neq g'$ ist $\mathbb{F}_g \not\cong \mathbb{F}_{g'}$.

Abgabe: Bis Freitag, den 22.12.2023 um 9 Uhr