Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
22.12.2023
Blatt 10

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 37.

(a) Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung $\mathrm{ex}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$, eine unendlich-blättrige Überlagerung ist. (Hinweis: Verwenden Sie geeignete Zweige des Logarithmus' für die lokalen Inversen von ex.)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die *Potenzfunktion* $\mathrm{pot}_n\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$, eine n-blättrige Überlagerung ist. (Hinweis: Verwenden Sie geeignete Zweige der n-ten Wurzel.)

(c) Zeigen Sie, dass die Projektion $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ eine 2-blättrige Überlagerung ist. (Hinweis: Verwenden Sie den *Standardatlas* $(U_0, \dots, U_n)$ von $\mathbb{P}^n$ mit $(i = 0, \dots, n)$

$$U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n : \ x_i \neq 0\}).$$

Aufgabe 38. Sei X ein Hausdorff-Raum, G eine topologische Gruppe und G operiere auf X.

(a) Zeigen Sie, dass

$$N := \{g \in G : \ g.x = x, \text{ für alle } x \in X\}$$

ein abgeschlossener Normalteiler von G ist und eine Wirkung der topologischen Gruppe G/N durch $(gN).x := g.x$ auf X induziert, die effektiv ist.

(b) Sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass die Standgruppe $G_x \subseteq X$ eine abgeschlossene Untergruppe von G ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch $x \sim y \Leftrightarrow y \in Gx$ eine Äquivalenzrelation auf X gegeben wird.

Aufgabe 39. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir fassen in dieser Aufgabe $(\mathbb{S}^k, \mathbf{1})$ als den *Einheitswürfel* $\mathbb{W}^k \subseteq \mathbb{R}^k$, $\mathbb{W}^k := I^k$, auf, bei dem wir den Rand $\partial\mathbb{W}^k \subseteq \mathbb{W}^k$ zu einem Punkt (dem Basispunkt von $(\mathbb{S}^k, \mathbf{1})$) identifizieren. Ist (X, p) ein punktierter topologischer Raum, so kann man dann das Produkt zweier *Schlaufen* $\alpha, \beta\colon (\mathbb{W}^k, \partial\mathbb{W}^k) \to (X, p)$ auch als

$$(\alpha * \beta)(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \alpha(2x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ für } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) \text{ für alle } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

einführen (vgl. den Fall $k = 1$ in der Vorlesung und Aufgabe 33). Zeigen Sie nun anhand von Skizzen im Definitionsbereich, wie Sie durch bloße Homotopien im Definitionsbereich, also ohne das Bild von $\alpha * \beta$ zu ändern, für $k \geq 2$ erhalten, dass $\beta * \alpha$ homotop zu $\alpha * \beta$ (rel $\partial \mathbb{W}^k$) ist und damit in der k. Homotopiegruppe von (X, p) gilt, und sie damit (im Gegensatz zum Fall $k = 1$) stets abelsch ist:

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\beta] \cdot [\alpha].$$

Aufgabe 40.

(a) Sei X ein topologischer Raum, $k \in \mathbb{N}$, $p, q \in X$ und γ ein Weg von p nach q. Zeigen Sie (ähnlich wie im Fall $k = 1$), dass $\pi_k(X, p) \cong \pi_k(X, q)$ ist. (Ist X wegzusammenhängend, so schreiben wir deshalb auch $\pi_k(X)$ für die Isomorphieklasse von $\pi_k(X, p)$ wie im Falle $k = 1$.)

(b) Zeigen Sie, dass π_k für alle $k \in \mathbb{N}$ Produkte respektiert:

$$\pi_k(X_1 \times X_2, (p_1, p_2)) \cong \pi_k(X_1, p_1) \times \pi_k(X_2, p_2).$$

(c) Zeigen Sie auch, dass π_k für alle $k \in \mathbb{N}$ über den natürlichen Funktor $\simeq\colon \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{HTop}_0$ faktorisiert.

Abgabe: Bis Freitag, den 12.01.2024 um 9 Uhr

Frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!