Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
12.01.2024
Blatt 11

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 41.

(a) Sei X ein topologischer Raum, G eine topologische Gruppe und G operiere (stetig) auf X. Sei $x \in X$ und $H \subseteq G$ die Standgruppe von x, $H = G_x$. Man nennt dann

$$\varphi_x\colon G \to X,\ \varphi_x(g) == g.x,$$

die Bahnabbildung von x. Zeigen Sie: Die Bahnabbildung φ_x induziert eine Abbildung $\bar{\varphi}_x\colon G/H \to Gx \subseteq X$, die stetig und bijektiv ist. (G/H trägt hierbei die Quotiententopologie als Bahnenraum unter der Wirkung $h.g = gh^{-1}$ von H auf G.)

(b) Sei nun Γ eine diskrete Gruppe und Γ operiere eigentlich diskontinuierlich auf einem topologischen Raum X. Zeigen Sie: Γ operiert dann frei und jede Bahnabbildung $\varphi_x\colon \Gamma \to \Gamma x \subseteq X$ $(x \in X)$ ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 42. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die diskrete Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiere auf $X = \mathbb{R}^n$ durch *Translationen*, $\gamma.x = x + \gamma$, für $\gamma \in \Gamma$ und $x \in X$. Zeigen Sie, dass die Operation eigentlich diskontinuierlich ist und die Inklusion $\iota\colon \mathbb{W}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ einen Homöomorphismus $\bar{\iota}\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sowie $\mathrm{ex}^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ einen Homöomorphismus $\overline{\mathrm{ex}}^n\colon \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}^n$ induzieren.

Aufgabe 43.

(a) $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\pm 1\}$ operiert auf $\mathbb{S}^n$ durch *Punktspiegelungen* (am Ursprung),

$$\pm 1.x = \pm x.$$

Zeigen Sie, dass diese Wirkung eigentlich diskontinuierlich ist und $\mathbb{S}^n/\Gamma$ homöomorph zu $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die topologische Gruppe $G = \mathbb{R}^*$ auf $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (für $n \in \mathbb{N}$) durch *Homothetien* wie folgt stetig operiert:

$$\lambda.x = \lambda x$$

($\lambda \in G$ und $x \in X$ sowie der skalaren Multiplikation im Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ auf der rechten Seite der Gleichung). Zeigen Sie, dass der Bahnenraum dieser *topologischen Transformationsgruppe* gerade $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist.

Aufgabe 44.

(a) Sei Γ eine endliche Gruppe, die frei auf einem Hausdorff-Raum durch stetige Abbildungen operiere. Zeigen Sie, dass die Wirkung dann schon eigentlich diskontinuierlich ist.

(b) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $\Gamma = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega^p = 1\} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die Gruppe der *p-ten Einheitswurzeln*. Sei weiter $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu p und $1 \leq q < p$. Zeigen Sie, dass Γ wie folgt auf $X = \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ eigentlich diskontinuierlich operiert:

$$\omega.(z_1, z_2) = (\omega z_1, \omega^q z_2).$$

(Hinweis: Wegen $\mathrm{ggT}(q, p) = 1$ existieren $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $kq + lp = 1$.)

Abgabe: Bis Freitag, den 19.01.2024 um 9 Uhr