Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
19.01.2024
Blatt 12

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 45. Sei (X, x_0) ein punktierter, zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum und $f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$ ein Morphismus in der Überlagerungskategorie über (X, x_0). Zeigen Sie, dass f selbst eine Überlagerung ist.

Aufgabe 46. Sei $\pi\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $U \subseteq X$ eine gleichmaßig überlagerte, offene und wegzusammenhängende Umgebung eines Punktes $x \in X$. Sei weiter $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, $\gamma \in \mathrm{Homoeo}(\tilde{X})$ eine Decktransformation von π und $\tilde{x}' = \gamma(\tilde{x})$. Seien schließlich $\tilde{U}, \tilde{U}' \subseteq \tilde{X}$ die Blätter über U, welche die Punkte $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{x}'$ enthalten. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\tilde{U}' = \gamma(\tilde{U}).$$

Aufgabe 47. Sei $n \in \mathbb{N}$. Der *komplex-projektive Raum* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ wird (ähnlich wie der reell-projektive Raum $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$) definiert als die Menge aller (komplexen) Geraden durch 0 im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^{n+1}$. Nimmt man den Nullpunkt jeder Geraden heraus, so erhält man eine Partition von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, deren Teile sich als die Bahnen unter Gruppenwirkung $\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$\lambda.z = \lambda z$$

für $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ergeben, wo auf der rechten Seite der Gleichung die skalare Multiplikation in $\mathbb{C}^{n+1}$ gemeint ist. Es ist also $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ der Bahnenraum dieser Wirkung und wir geben ihm die Quotiententopologie,

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*.$$

Jede Äquivalenzklasse $p = [(z_0, \cdots, z_n)] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ wird mit $(z_0 : \cdots : z_n)$ notiert und man spricht dann von den *homogenen Koordinaten* $z_0, \ldots, z_n$ des Punktes p.

(a) Für jedes $j = 0, \ldots, n$ sei

$$U_j = \{(z_0 : \cdots : z_n) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n : \ z_j \neq 0\}$$

und $\varphi_j\colon U_j \to \mathbb{C}^n$,

$$(z_0 : \cdots , z_n) \mapsto (\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}).$$

Zeigen Sie, dass φ_j wohldefiniert ist und ein Homöomorphismus für jedes $j = 0, \ldots, n$. (Der *Atlas* $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ zeigt dann, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ eine $2n$-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit ist.)

(b) Es operiere die *Kreisgruppe* $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$ vermöge

$$\lambda.z = \lambda z,$$

für $\lambda \in \mathbb{S}^1$, und $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ und damit, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ kompakt ist.

(c) Zeigen Sie:

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong \mathbb{S}^2.$$

(Hinweis: $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = U_0 \mathbin{\dot\cup} \{(0:1)\} = \mathbb{C} \mathbin{\dot\cup} \{\infty\}$ (mit $\infty := (0:1)$), der *Riemannschen Zahlenkugel*.)

Aufgabe 48. Zeigen Sie mit Hilfe des Liftungssatzes:

(a) Die höheren Homotopiegruppen der Kreislinie sind trivial,

$$\pi_k(\mathbb{S}^1) = (0), \text{ für alle } k \geq 2.$$

(b) Ist $\pi \colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, so induziert π einen Isomorphismus zwischen den höheren Homotopiegruppen von $\tilde{X}$ und X,

$$\pi_k(\tilde{X}) = \pi_k(X), \text{ für alle } k \geq 2.$$

Abgabe: Bis Freitag, den 26.01.2024 um 9 Uhr