Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
26.01.2024
Blatt 13

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 49. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ der komplex-projektive Raum der (komplexen) Dimension n sowie $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die kanonische Projektion (vgl. Aufgabe 47, Blatt 12).

(a) Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ein Weg. Zeigen Sie, dass es einen Lift $\tilde{\alpha}\colon I \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ von α über π gibt.

(b) Zeigen Sie nun, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ einfach zusammenhängend ist. (Hinweis: $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{2n+1}$ ist einfach zusammenhängend und die Fasern von π sind wegzusammenhängend.)

Aufgabe 50 (*Analogon des Hauptsatzes der Galoistheorie*)**.** Sei $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine reguläre Überlagerung. Wir nennen eine Überlagerung $\pi'\colon (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ eine *Teilüberlagerung von* π, wenn es einen Überlagerungsmorphismus $f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ von π nach π', also mit $\pi' \circ f = \pi$, gibt. Einer solchen Teilüberlagerung π' ordnen wir die Untergruppe $\Phi(\pi') = \Gamma' := \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X')$(denn f ist ja nach Aufgabe 45 dann selbst eine Überlagerung) von $\Gamma := \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$ zu und umgekehrt jeder Untergruppe Γ' von Γ die Teilüberlagerung $\Psi(\Gamma') = \pi'$, die von der kanonischen Projektion $f\colon \tilde{X} \to \tilde{X}/\Gamma' =: X'$, $\pi'\colon X' \to X$, induziert wird.

(a) Zeigen Sie, dass Φ und Ψ invers zueinander sind. (Es gibt also eine 1:1-Beziehung zwischen den Teilüberlagerungen von π und den Untergruppen der Decktransformationsgruppe von π.)

(b) Zeigen Sie, dass π' genau dann regulär ist, wenn $\Gamma' = \Phi(\pi')$ ein Normalteiler von Γ ist.

Aufgabe 51.

(a) Begründen Sie, dass ein unendliches Produkt von Kreislinien, $X = \Pi_{i \in I} \mathbb{S}^1$ (I eine unendliche Indexmenge), nicht semilokal einfach zusammenhängend ist.

(b) Begründen Sie, dass ein beliebiges Bukett von Kreislinien, $Y = \bigvee_{i \in I} \mathbb{S}^1$ (mit einer beliebigen Indexmenge I) semilokal einfach zusammenhängend ist.

(c) Begründen Sie, warum der Raum

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$$

nicht semilokal einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 52. Skizzieren Sie die universelle Überlagerung der Figur Acht $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

Abgabe: Bis Freitag, den 02.02.2024 um 9 Uhr