Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
02.02.2024
Blatt 14

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 53. Sei $(G, \cdot)$ eine (lokal wegzusammenhängende, zusammenhängende) topologische Gruppe mit Einselement $e \in G$ und $\pi \colon \tilde{G} \to G$ eine Überlagerung. Sei weiter $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e) \subseteq \tilde{G}$. Zeigen Sie, dass es genau eine Gruppenstruktur $\tilde{\cdot}$ auf $\tilde{G}$ gibt, so dass $(\tilde{G}, \tilde{\cdot})$ zu einer topologischen Gruppe mit Einselement $\tilde{e}$ und π zu einem Homomorphismus (zwischen topologischen Gruppen) wird.

Aufgabe 54. Zeigen Sie, dass die Kettenkomplexe mit den Kettenabbildungen eine Kategorie bilden und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Homologie H_k ein Funktor von dieser Kategorie in die Kategorie der abelschen Gruppen ist.

Aufgabe 55. Sei M eine Menge. Wir betrachten die Menge $\mathrm{F}(M)$ aller formalen Ausdrücke (genauer: aller Abbildungen von M nach $\mathbb{Z}$)

$$c = \sum_{x \in M} n_x x,$$

wo $n_x \in \mathbb{Z}$ ist, für alle $x \in X$ und nur in endlich vielen Fällen $n_x \neq 0$ sei. Wir machen $\mathrm{F}(M)$ zu einer abelschen Gruppe vermöge der Verknüpfung

$$\sum n_x x + \sum m_x x := \sum (n_x + m_x) x$$

(bzw. der natürlichen von $\mathbb{Z}$ induzierten Strukur auf $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{Z})$). Dann nennen wir $(\mathrm{F}(M), +)$ die *von M frei erzeugte abelsche Gruppe*. Die Kardinalität von M heißt *ihr Rang*.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{F}(M)$, zusammen mit der *natürlichen Inklusion* $i \colon M \to \mathrm{F}(M)$, $i(x) = x$ (der formale Ausdruck $\sum_y n_y y$, der nur bei $y = x$ den Koeffizienten $n_x = 1$ hat, sonst Null), folgende *universelle Eigenschaft* erfüllt: Ist A eine abelsche Gruppe und $j \colon M \to A$ eine Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi \colon \mathrm{F}(M) \to A$ mit $\Phi \circ i = j$.

(b) Seien M und N Mengen, $i_M \colon M \to \mathrm{F}(M)$ und $i_N \colon N \to \mathrm{F}(N)$ die natürlichen Inklusionen sowie $f \colon M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es genau einen Homomorphismus $f_* = \mathrm{F}(f) \colon \mathrm{F}(M) \to \mathrm{F}(N)$ gibt mit $f_* \circ i_M = i_N \circ f$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{F} \colon \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ab}$, $M \to \mathrm{F}(M)$, $f \to \mathrm{F}(f)$, ein Funktor ist.

Aufgabe 56. Seien F und G Funktoren zwischen zwei Kategorien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$. Eine *natürliche Transformation* Φ *von* F *nach* G ordnet jedem Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ einen Morphismus $\Phi(X_1) \in \operatorname{Mor}(F(X_1), G(X_1))$ in $\mathcal{C}_2$ derart zu, dass für jedes $f \in \operatorname{Mor}(X_1, Y_1)$ in $\mathcal{C}_1$ gilt:

$$\Phi(Y_1)F(f) = G(f)\Phi(X_1).$$

(a) Zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist der verbindende Homomorphismus $(\partial_*)_k$ eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren H_k'' und H_{k-1}', die von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen $\mathbf{KES} - \mathbf{KK}$ in die Kategorie $\mathbf{Ab}$ der abelschen Gruppen geht.

(b) Zeigen Sie schließlich, dass das Bilden der langen Homologiesequenz ein Funktor von $\mathbf{KES} - \mathbf{KK}$ in die Kategorie der *langen exakten Sequenzen abelscher Gruppen* $\mathbf{LES}$ ist.

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 08.02.2024 um 9 Uhr**, aber nur wenn Sie noch Punkte für die Klausurzulassung benötigen, sonst bitte keine Abgabe mehr