Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
09.02.2024

Klausur zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum, $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen und $\Delta \subseteq X \times X$ die Diagonale in $X \times X$, $\Delta = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist X Hausdorffsch, so ist die Diagonale $\Delta \subseteq X \times X$ abgeschlossen.

(b) Ist $\Delta \subseteq X \times X$ abgeschlossen, so ist X Hausdorffsch.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Die *zu* $\mathcal{C}$ *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ wird dadurch definiert, dass sie die gleichen Objekte wie $\mathcal{C}$ hat, für zwei Objekte X und Y aber $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y)$ als $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ definiert. Als Komposition in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ definiert man bei drei Objekten X, Y und Z in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ für $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y, Z)$

$$g * f := f \circ g,$$

wo $\circ$ die Komposition in $\mathcal{C}$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ tatsächlich eine Kategorie ist.

(b) Zeigen Sie, dass für eine weitere Kategorie $\mathcal{D}$ ein kontravarianter Funktor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ als ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{D}$ aufgefasst werden kann und umgekehrt.

Aufgabe 3. Sei $0 < r < 1 < R$ und $A \subseteq \mathbb{C}$ *der Kreisring*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z| < R\}.$$

(a) Begründen Sie, warum A nicht homöomorph zur *Kreisscheibe* $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ sein kann.

(b) Begründen Sie, warum A auch nicht homöomorph zur *Kreislinie* $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sein kann.

Aufgabe 4. Wir betrachten die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

(a) Begründen Sie, warum exp die universelle Überlagerung von $\mathbb{C}^*$ sein muss.

(b) Bestimmen Sie alle Decktransformationen von exp und zeigen Sie damit, dass $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$ ist.

Viel Erfolg!