Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2023/24
12.04.2024

Nachklausur zu „Algebraische Topologie“

Aufgabe 1. Sei $G = \mathbb{O}(n)$ die Menge der orthogonalen $n \times n$-Matrizen ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Erläutern Sie, warum G in natürlicher Weise eine topologische Gruppe ist und warum die Abbildung $G \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, $(A, x) \mapsto A.x := Ax$, eine topologische Wirkung von G auf der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.

(b) Bestimmen Sie nun die Standgruppe $H \subseteq G$ dieser Wirkung für den Nordpol $N = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{n-1}$ und zeigen Sie, dass die Bahnabbildung $\varphi\colon G \to \mathbb{S}^{n-1}$, $A \mapsto A.N$, einen Homöomorphismus $\bar{\varphi}$ von G/H nach $\mathbb{S}^{n-1}$ induziert.

Aufgabe 2. Für jede Menge X bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, d.i. die Menge aller Teilmengen von X.

(a) Definieren Sie für jede Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen Mengen X und Y den *Bildmengenoperator* $f_*\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ und zeigen Sie, dass $\mathcal{P}$ damit zu einem covarianten Funktor von **Ens** nach **Ens** wird.

(b) Definieren Sie für $f\colon X \to Y$ wie unter (a) auch einen *Urbildmengenoperator* $f^*\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ und zeigen Sie, dass $\mathcal{P}$ dadurch zu einem kontravarianten Funktor von **Ens** nach **Ens** wird.

Aufgabe 3. Sei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall und R die von $(0, t) \sim (1, 1-t)$ ($t \in I$) erzeugte Äquivalenzrelation auf $X = I \times I$ sowie $\mathbb{M} = X/R$ das *Möbiusband*.

(a) Zeigen Sie, dass $S = \{[s, \frac{1}{2}] : \ s \in I\} \subseteq \mathbb{M}$ ein Retrakt von $\mathbb{M}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass S (die „Seele von $\mathbb{M}$“) sogar ein Deformationsretrakt von $\mathbb{M}$ ist und bestimmen Sie damit die Fundamentalgruppe von $\mathbb{M}$.

Aufgabe 4. Wir betrachten den Zylinder $Z = \mathcal{Z}(\mathbb{S}^1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Begründen Sie, warum $\pi_1(Z) = \mathbb{Z}$ ist.

(b) Begründen Sie, warum $\pi_k(Z) = (0)$ ist, für alle $k \geq 2$.

Viel Erfolg!