

Analysis I / Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. P. Pickl, Umut Özcan

Blatt 9

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Gegeben seien die Reihe $r_n := \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \frac{1}{j}$ und deren Umordnung

$$s_n := \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Aufgabe 2: (2 Punkte) Gegeben seien zwei absolut konvergente Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$. Das Cauchy-Produkt dieser beiden Reihen ist definiert als die Reihe gegeben durch $r_n := \sum_{j=0}^n c_j$ mit $c_j := \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k}$. Zeigen Sie, dass die durch r_n gegebene Reihe absolut konvergiert, sowie dass $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{j=0}^{\infty} b_j$.

Hinweis: Der Beweis ist zu großen Teilen identisch mit dem in der Vorlesung behandelten Sonderfall $a_j = \frac{x^j}{j!}$ und $b_j = \frac{y^j}{j!}$.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie bei folgenden in kartesischer Form gegebenen komplexen Zahlen die Polarform: $z = 1 + i$; $x = 4 - 5i$; $y = 2i$.

Bestimmen Sie bei folgenden in Polarform gegebenen komplexen Zahlen die kartesische Form: $u = e^{i\pi/2}$; $v = 4e^{-i\pi/2}$; $w = 3e^{i\pi\frac{5}{3}}$.

- (b) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-1} = -1$$

Aufgabe 4: (2 Punkte) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Regeln für Sinus und Cosinus:

$$\sin(2\phi) = 2 \sin(\phi) \cos(\phi)$$

$$\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$$

$$\sin(3\phi) = 3 \sin(\phi) - 4 \sin^3(\phi)$$

$$\cos(3\phi) = 4 \cos^3(\phi) - 3 \cos(\phi)$$

$$\sin(\phi) + \sin(\theta) = 2 \sin\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right)$$

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bei Ihrem Übungsleiter bis spätestens 20.12.2023 um 10:15 ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben. Eine elektronische Abgabe per Upload über URM wird bevorzugt.