Klausur zur Analysis I/Mathematik f. Physiker I

Peter Pickl
Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen

12. Februar 2024

- Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie abgeben, oben rechts Ihren Namen. Beginnen Sie mit einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt. Kein Blatt soll Lösungvorschläge mehrerer Aufgaben beinhalten, das Verwenden mehrerer Blätter für eine Aufgabe ist natürlich zulässig.
- Erlaubte Hilfsmittel sind Schreibzeug und ein DIN A4 Blatt, das beidseitig handschriftlich beschrieben sein darf (legaler "Spickzettel"). Papier für die Lösungen wird gestellt. Ein nicht programmierbarer Taschenrechner ist zulässig.
- Sollten Sie Kommunikationsgeräte bei sich führen (Handy, Laptop, etc.) sind diese verschlossen aufzubewahren, z.B. in einem Rucksack mit geschlos-senem Reißverschluss. Gleiches gilt für jegliches Material, das mit dem Kurs zu tun hat (Bücher, Skripte etc.).
- Jede Aufgabe gibt die gleiche Punktzahl.
- Bei Bedarf kann zusätzliches Papier angefordert werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.

Name, Vorname:..

Matrikelnummer:..

Studiengang:...

Für Studierende der Physik: Wo wurde die Studienleistung erworben (falls nicht bei uns)

....

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1: Für welche natürlichen Zahlen n gilt: $2^n \geq 3n-1$? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Lösung: Die Aussgae gilt für $n = 1$ da $2^1 = 2 = 3 * 1 - 1$. Die Aussage gilt für $n = 2$ nicht, da $2^2 = 4 < 3 * 2 - 1 = 5$.

Induktionsanfang: $n = 3$. Da $2^3 = 8 = 3 * 3 - 1$ gilt die Aussage für $n = 3$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $2^n \geq 3n - 1$ und müssen zeigen, dass $2^{n+1} \geq 3(n+1) - 1 = 3n + 2$.

Es gilt nach Induktionsvorraussetzung $2^{n+1} = 22^n \geq (3n-1) * 2 = 6n - 2 = [3(n+1) - 1] + 3n - 4$. Für $n \geq 2$ ist $3n - 4 > 0$, also ist $2^{n+1} \geq 3(n+1) - 1$ (sogar echt größer).

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Auf $\mathcal{M}$ seien folgende Relationen definiert

$$\begin{aligned} f \sim_a g &\Leftrightarrow f(x)g(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ f \sim_b g &\Leftrightarrow f(x)g(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie beide Relationen jeweils auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Beweisen Sie jeweils Ihre Aussage.
Zur Erinnerung: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität sind die definierenden Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

Lösung: 1. Reflexivität: Falls f eine Nullstelle hat, gilt $f(x) = f(x) > 0$ nicht überall. Also ist $\sim_a$ nicht reflexiv.

Jedoch gilt $f(x)f(x) \geq 0$ immer, also ist $\sim_b$ reflexiv.

2. Symmetrie: Wegen Kommutativitätsgesetz gilt $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also sind beie Relationen symmetrisch.

3. Transitivität: Sei $f(x)g(x) > 0$ und $g(x)h(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. E folgt $f(x)g(x)g(x)h(x) > 0$, da $g(x)^2$ nicht negativ sein kann ist $f(x)h(x) > 0$, es ist also $\sim_a$ transitiv.

Sei $f \equiv 1$, $g \equiv 0$, $h \equiv -1$. Es ist also $f \sim_b g$ und $g \sim_b h$ aber nicht $f \sim_b h$, also ist $\sim_b$ nicht transitiv.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$. Bestimmen Sie den Wertebereich von f. Beweisen Sie ihre Aussage.

Lösung: Es gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x - 1/x^2}{1-3/x^2} = 0$$

Die lokalen Extrema findet man durch $f'(x) = \frac{x^2+3-(x-1)2x}{(x^2+3)^2}$. Für die Nullstellen ist nur der Nenner relevant. Man erhält

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+3-2x^2+2x = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+3 = 0$$

Mitternachtsformel liefert $x_{1/2} = (-2\pm\sqrt{16})/(-2) = 1\pm 2$ also $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$. Die Funktionswerte sind $f(3) = \frac{1}{6}$ und $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

Da die Funktion überall stetig ist, keine Polstellen besitzt und die Limiten nach $\pm\infty$ Null sind, kann an der Stelle 3 nur ein globales Max, bei -1 ein globales Minimum sein. Der Wertebereich ist also eine Teilmenge von $[-1/2, 1/6]$. Da die Funktion überall stetig ist werden nach Zwischenwertsatz alle Werte zwischen $-1/2$ und $1/6$ angenommen. Es ist also $W = [-1/2, 1/6]$

Aufgabe 4: Es sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein beliebiges Polynom. Zeigen Sie:

(a)
$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}p(x) = 0$$

(b)
$$\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} p\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Lösung:

(a) Sei zunächst $p(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Für alle positiven x gilt $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \geq \frac{x^{n+1}}{n+1}!$. Es gilt also

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x^n(n+1)!}{x^{n+1}} = 0$$

Ausserdem ist der Ausdruck nichtnegativ. Also ist $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^n = 0$. Wegen sätzen über integrale folgt

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}p(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = \sum_{j=0}^{n} a_j \lim_{x\to\infty} e^{-x}x^n = 0\ .$$

Alternativ: Induktionsbeweis zur Aussage "Für jede natürliche Zahl n gilt: Für jedes Polynom vom Grad n ist $\lim_{x\to\infty} e^{-x}p(x) = 0$".

Induktionsanfang: $n = 0$: $\lim_{n\to\infty} e^{-x}C = C\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Induktionsschrit: Annahme: $\lim_{n\to\infty} e^{-x}q(x) = 0$ für jedes Polynom q vom Grad n.

Sei nun p ein beliebiges Polynom von Grad $n+1$. L' Hospital liefert

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x}p(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{p'(x)}{e^x}$$

Da p' ein Polynom vom Grad n ist liefert die Induktionsannahme, dass letzteres gleich 0 ist.

(b) Nach Vorlesung gilt für jede positive Nullfolge x_n dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$. Schreibe $t = 1/x$ es folgt also $\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} p\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to\infty} e^{-t} p(t)$. Letzteres ergibt 0 nach Teil a)

Aufgabe 5: Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit beschränkter Ableitung, d.h. es existiert ein $C \in \mathbb{R}^+$ so dass $|f'(t)| \leq C$ für alle $t \in]a, b[$.

Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Lösung: Erst zeigen wir, dass für alle $x < y \in [a, b]$ gilt: $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq C$. Dazu WA: Es gibt $x < y \in [a, b]$ mit $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} > C$, dann gibt es nach Mittelwertsatz ein $t \in]x, y[\subset]a, b[$ mit $|f'(t)| > C$ was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Es gilt also für alle $x < y \in [a, b]$, dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$. Analog gilt diese Aussage für alle $x > y \in [a, b]$. Für $x = y$ ist sie trivial. Also gilt für alle $x, y \in [a, b]$, dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$.

Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\delta = \varepsilon/C$ es gilt also:

Für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$, dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| = C\varepsilon/C = \varepsilon$. Das ist genau die gleichmässige Stetigkeit.