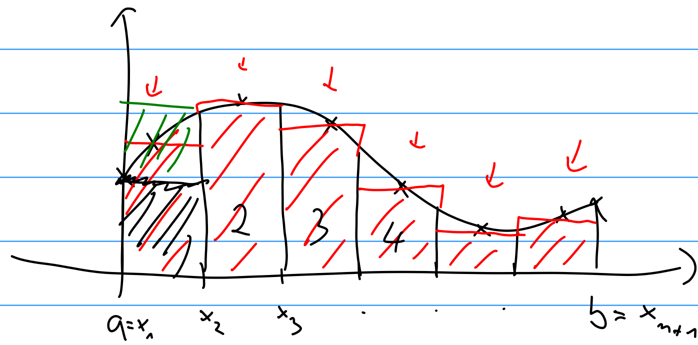
Riemann integral



<u>Definition</u>: Sei $[a,b]$ ein Intervall ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Eine $n+1$-Tupel $(x_1, x_2 \dots, x_{n+1})$ nennen wir Zerlegung von $[a,b]$ falls

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

<u>Definition</u>: Für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung Z von $[a,b]$ definieren wir

$$O(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} (x_{j+1} - x_j) \sup_{x \in [x_{j+1}, x_j]} f(x)$$

$$U(f, Z) := \quad \dots \inf_{\dots} \dots$$

Mit Hilfe von O und U lässt sich die Fläche unter der Kurve von oben bzw unten abschätzen. Falls wir einen sinnvollen Flächenbegriff finden ist $O(f,Z)$ größer, $U(f,Z)$ kleiner als die Fläche.

<u>Definition</u>: Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{Z \text{ Zerlegung}} O(f,Z) \quad \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_{Z \text{ Zerlegung}} U(f,Z) \quad \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Falls $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ nennen wir f auf $[a,b]$ R-integrierbar.

Dann schreiben wir $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Satz: Falls f auf $[a,b]$ integrierbar ist, so ist f auf $[a,b]$ beschränkt.

Beweis: 1. Fall: Sei f von oben unbeschränkt, dann gibt es für jede Zerlegung mindestens ein Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$ auf dem $\sup f$ unendlich ist $\Rightarrow O(f,Z) = +\infty \quad \forall$ Zerlegungen Z

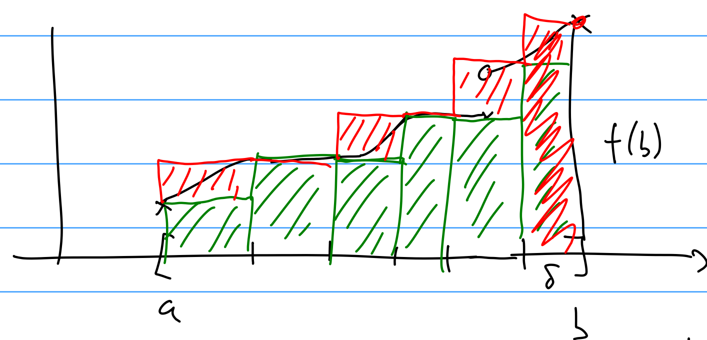
$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = +\infty$$

Aber $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < +\infty$. $\Rightarrow \overline{\int_a^b} \neq \underline{\int_a^b}$

2. Fall: f von unten unbeschränkt beweist man analog.

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar.

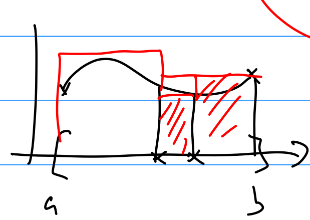
Beweis:

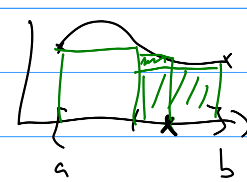


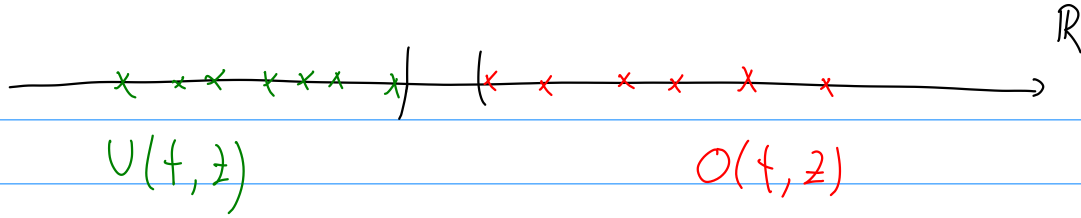
Zunächst gilt immer, dass $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Das folgt, da $O(f,Z) \geq U(f,Z) \quad \forall Z$ Zerlegung, und außerdem gilt für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 folgendes:

$$O(f,Z_1) \geq O(f, Z_1 \cup Z_2) \geq U(f, Z_1 \cup Z_2) \geq U(f, Z_2)$$







Für Integrierbarkeit bleibt zu zeigen:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Z_1, Z_2$ Zerlegung mit $O(f, Z_1) - U(f, Z_2) < \varepsilon$.

Für die Monotone Funktion (o.B.d.A steigend) wählen wir $Z_1 = Z_2$ für eine Zerlegung, in der jedes Teil-Intervall die Länge δ hat. Es gilt $O(f, Z_1) - U(f(Z_2)) \leq \delta \cdot f(b)$

$\left(\delta = \frac{b-a}{n} \right)$ Für jedes $\varepsilon > 0$ können wir n so wählen, dass $O(f, Z_1) - U(f, Z_1) \leq \frac{b-a}{n} f(b) < \varepsilon$

Korollar: Eine Funktion ist genau dann integrierbar, falls $\forall \varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z existiert, so dass

$$O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon$$

Beispiel: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

f ist auf $[0,1]$ nicht Riemann-integrierbar.

Für jede Zerlegung Z ist $U(f, Z) = 0$ da in jedem Teilintervall eine rationale Zahl ist:

$$U(f, Z) = \sum_{j=1}^{n} (x_{j+1} - x_j) \underbrace{\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)}_{=0} = 0$$

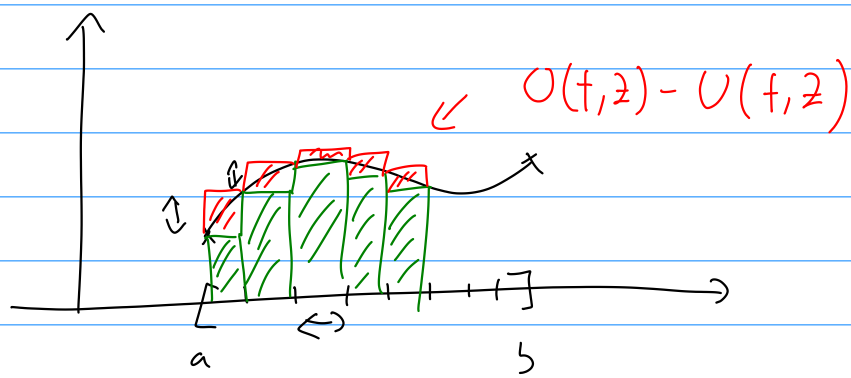
$$O(f, Z) = \sum_{j=1}^{n} (x_{j+1} - x_j) \underbrace{\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)}_{=1} = \sum_{j=1}^{n} x_{j+1} - x_j = b - a$$

$= 1$ (unser Fall)

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1 \neq 0 = \underline{\int_0^1} f(x)\,dx \qquad \square$$

<u>Satz</u>: Jede auf einem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion ist dort integrierbar.

<u>Beweis</u>: Nach Satz ist f gleichmäßig stetig ($[a,b]$ ist kompakt!)



Wir zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0$ ein Z existiert mit $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gilt: $\left(\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$ $\exists\, \delta > 0$ so dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$

Wähle nun n so, dass $\frac{b-a}{n}$ kleiner als δ ist und als Zerlegung $a = x_1 < x_1 + \frac{b-a}{n} < x_1 + \frac{b-a}{n} \cdot 2 \;\dots < x_{n+1} = b$

$\frac{b-a}{n}$ ist also die Länge aller Teilintervalle der Zerlegung Z.

$$O(f,Z) - U(f,Z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot \underbrace{\left[\overset{\max}{\sup_{x \in \underbrace{[x_j, x_{j+1}]}_{\text{Länge} < \delta}}} f(x) - \overset{\min}{\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]}} f(x) \right]}_{< \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b-a}}$$

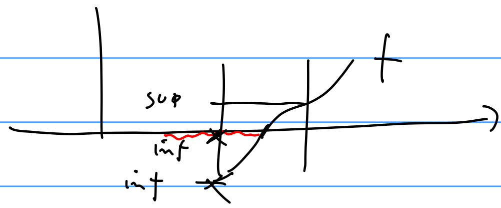
$$< \sum_{j=1}^{n} \frac{\cancel{b-a}}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} = \varepsilon$$

Satz: Sei f auf $[a,b]$ integrierbar, so sind auch f^+, f^- und $|f|$ auf $[a,b]$ integrierbar.

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls das} \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f^-(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls das} < 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Es gilt für jede Zerlegung Z, dass

$$O(f,Z) - U(f,Z) \geq \underline{O(f^+,Z) - U(f^+,Z)}$$



Die Differenz von $\sup f$ und $\inf f$ wird durch Abschneiden der negativen Teile nicht größer.

f^- und $|f|$ ähnlich.

Bemerkung: Umkehrung gilt nicht (für $|f|$)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}.$$