

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 3 (Abgabe spätestens 03.11.2023, 8:00)

Aufgabe 13 (15 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

$$\text{a) } \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \pi^{\nu} \qquad \text{b) } \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \pi^k \qquad \text{c) } \sum_{\nu=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{\ell}{\nu} \pi^{\nu}$$

Aufgabe 14 (10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$3^n > n^3 \quad \forall n > 3.$$

Aufgabe 15 (6+10+4 = 20 Punkte)

Seien f , g und h Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f(x) = x^2 - 2, \quad g(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{und} \quad h(x) = x^3 + 3.$$

- a) Bestimmen Sie für f , g und h jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie das Bild (als Teilmengen von \mathbb{R}).
- b) Existieren die folgenden Verkettungen? (Die Definitionsbereiche aus Teil (a) gelten weiterhin.) Geben Sie ggf. den Definitionsbereich und das Bild der jeweiligen Verknüpfung an.

(i) $f \circ g$	(ii) $g \circ f$	(iii) $f \circ h$
(iv) $h \circ f$	(v) $g \circ h$	(vi) $h \circ g$

- c) Bestimmen Sie $(h \circ f)(x) - (f \circ h)(x)$.

Aufgabe 16 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+2n^2} \left(\frac{6n^5 - 5n^4 + 7}{2n^2} - 3n^3 \right) \right) \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 + n} \right)$$

