

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 6 (Abgabe spätestens 24.11.2023, 8:00)

Aufgabe 29

(1+6+3 = 10 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen *Sinus Hyperbolicus*, *Kosinus Hyperbolicus* und *Tangens Hyperbolicus* sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ können wir die Funktionen definieren?
- Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.
- Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Aufgabe 30

(3+4+4 = 11 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

- $\sinh x$,
- $\cosh x$
- und
- $\tanh x$

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun die Graphen von \sinh , \cosh und \tanh . Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie größtmögliche Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Aufgabe 31

(3+5+3 = 11 Punkte)

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Arasinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh , d.h. $\operatorname{Arsinh}(\sinh(x)) = x$, analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

- $\operatorname{Arsinh} x$,
- $\operatorname{Arcosh} x$
- und
- $\operatorname{Artanh} x$

an. Bei (a) und (c) ist dies eindeutig – bei (b) können wir zwei Zweige angeben. Berechnen Sie dann mithilfe von Satz 6 die Ableitungen dieser Funktionen.

BEMERKUNG: Sie benötigen dazu keine expliziten Darstellungen der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 30.

Aufgabe 32

(6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 14.01.2024 auf www.khanacademy.org die Skills

- *Evaluate inverse functions*,
- *Finding inverses of linear functions*,
- *Use the properties of logarithms*,

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).